

PAVAGES

EXPOSÉ DE PIERRE DE LA HARPE

Chapitres.

1. Quelques pavages du plan, des très classiques aux inconnus.
2. Les puzzles à solutions multiples, source de problèmes pédagogiques.
3. Une partie du 18e problème de Hilbert.
4. Une question de périodicité.
5. Pavages de Penrose.
6. Quelques autres développements.

En 1951, le mathématicien Hermann Weyl (1885-1955) donna quatre leçons à l'intention d'un public non spécialisé, à Princeton. Elles ont été rédigées sous forme d'un livre superbe, *Symmetry* [Weyl–52]. On y lit page 103 :

The art of ornament contains in implicit form the oldest piece of higher mathematics known to us.

Cela pour noter d'entrée que le thème de mon exposé est absolument classique et qu'il se rattache à de très anciennes traditions ; il reste néanmoins plein d'énigmes et de surprises, d'où son importance dans la recherche mathématique actuelle. En particulier, le sujet est vaste, comme en témoigne par exemple la référence encyclopédique obligée [GrSh–86]. Mon choix pour ce qui suit est donc hautement subjectif, nécessairement. Mais j'aimerais faire passer au moins une idée :

L'histoire de la géométrie en dimensions 2 et 3 ne se limite pas à Euclide (les "Éléments", vers 300 av. J.-C.), loin s'en faut : d'une part elle remonte à des temps bien plus anciens (allusion de Weyl, voir aussi par exemple [Jone–56] et [Haml–16]), d'autre part elle a occupé tout le XXe siècle, et elle est encore aujourd'hui un domaine actif de recherche.

Date: 30 novembre 2011. Ce texte reprend la matière d'un exposé au *Basler Kolloquium für Mathematiklehrpersonen* (24 novembre 2010), ainsi que d'un *premier plan* d'exposé au séminaire *Math & Société* (Neuchâtel, 30 novembre 2011). Ce plan a été modifié suite à l'attribution du prix Nobel de chimie le 5 octobre 2011, voir notamment [HaKw–11] et [Ghys–11].

1. Quelques pavages du plan, des très classiques aux inconnus

Etant donné un polygone plan P , quand peut-on paver le plan tout entier par des copies isométriques de P , sans chevauchement ?

1.1. Pavages réguliers. Si P est un polygone régulier, il y a trois exemples classiques : pavage par hexagones réguliers, ou nids d'abeille, pavage par carrés, ou quadrillage, et pavage par triangles équilatéraux.

Convenons qu'un pavage par polygones est *strict* si, lorsque deux de ses polygones se touchent, ils ont en commun ou bien un seul point qui est un sommet de chacun d'entre eux, ou bien un côté entier de chacun d'entre eux. Il est alors facile de montrer que tout pavage strict du plan par une seule espèce de polygone régulier est l'un des trois exemples classiques : hexagonal, carré, ou triangulaire, comme ci-dessus. On attribue parfois la démonstration de ce résultat au mathématicien grec Pappus, du III^e siècle après J.-C. Le résultat a de très nombreuses illustrations : autant dans de magnifiques mosaïques antiques que dans divers pavages actuels de sols, par exemple dans nos salles de bain.

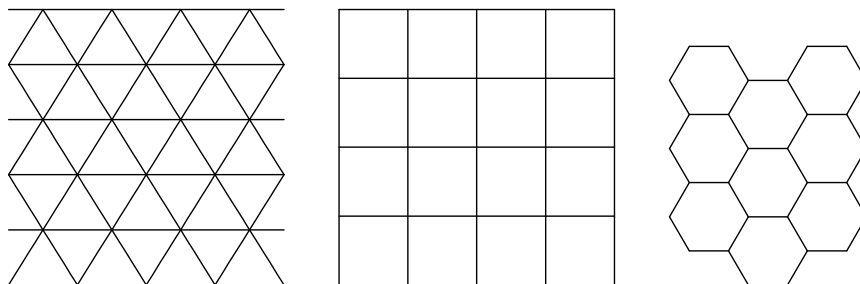


Figure 1 : pavages réguliers.

1.2. Pavages par triangles, hexagones et quadrilatères. Préparons-nous à évoquer un *problème ouvert*, c'est-à-dire un problème auquel de nombreux mathématiciens ont déjà réfléchi, mais dont la solution n'est toujours pas connue. On se donne un polygone P , disons convexe (sans "angle rentrant"), et on se demande s'il existe un pavage du plan par des copies isométriques de P . Mais on ne suppose plus que P est nécessairement régulier !

Si P est un triangle, il existe toujours un pavage par copies de P . En effet, deux triangles égaux s'assemblent naturellement pour former un parallélogramme, une suite de parallélogrammes pave une bande infinie à côtés parallèles, et une suite de bandes parallèles pave le plan.

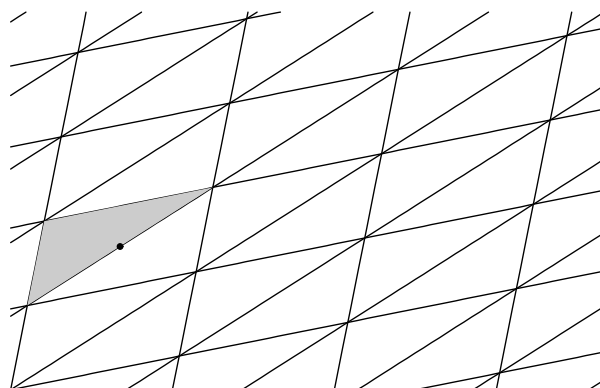


Figure 2 : pavage triangulaire.

Si P est un hexagone convexe, la réponse est un peu plus longue à formuler, mais elle est connue depuis la thèse [Rein-18] soutenue en 1918 par Karl Reinhardt (1895-1941), sous la direction de Bieberbach. En fait, il existe trois familles d'hexagones convexes, chaque hexagone de l'une de ces familles pave le plan (ce qu'on vérifie très facilement), et aucun autre hexagone convexe ne pave le plan (ce qui constitue la partie du théorème la plus délicate à montrer). Décrivons *l'une* de ces trois familles : il s'agit des hexagones convexes ayant une paire de côtés parallèles et de même longueur.



Figure 3 : pavage par certains hexagones.

Si P est un quadrilatère, il existe toujours un pavage par copies de P . La démonstration ressemble à celle de l'énoncé analogue pour les triangles : deux quadrilatères égaux s'assemblent naturellement pour former un hexagone avec côtés opposés parallèles et de même longueur, de tels hexagones pavent le plan, donc P aussi.

Si P est un polygone convexe à 7 côtés ou plus, la réponse est facile à formuler : P ne pave pas le plan. La démonstration n'est pas difficile, mais tout de même trop longue pour ce texte.

1.3. Le cas des pentagones, un problème ouvert. Reste le cas des pentagones convexes. Il est facile de montrer que certains pentagones pavent le plan (par exemple la réunion d'un carré avec un triangle rectangle dont l'hypothénuse coïncide avec un côté du carré – une “maison”) et que certains pentagones ne pavent pas (par exemple un pentagone régulier). Il est même facile de décrire d'assez grandes familles qui pavent la plan. Mais voici un *problème ouvert* :

trouver un algorithme qui, étant donné un pentagone convexe P décrit par ses angles et les longueurs de ses côtés, permette de savoir si oui ou non P pave le plan.

2. Les puzzles à solutions multiples source de problèmes pédagogiques

2.1. Un énoncé général. Soient F' et F'' deux figures planes ; pour simplifier la discussion, je supposerai que F' et F'' sont soit des polygones, soit des réunions de polygones (exemple : F' est constitué de deux carrés disjoints). Existe-t-il un puzzle dont les pièces $P_1^{(0)}, \dots, P_k^{(0)}$ peuvent s'assembler pour former F' , et également pour former F'' ? En d'autres termes, F' et F'' sont-ils *équidécomposables* ? Ou, encore en d'autres termes, cette fois plus techniques, existe-t-il deux familles (P'_1, \dots, P'_k) et (P''_1, \dots, P''_k) de polygones¹ du plan satisfaisant aux trois conditions suivantes ?

- (a) P'_j et P''_j sont isométriques à $P_j^{(0)}$, pour $j = 1, \dots, k$;
- (b) $\bigcup_{1 \leq j \leq k} P'_j = F'$ et $\bigcup_{1 \leq j \leq k} P''_j = F''$;
- (c) P'_i et P'_j sont d'intérieurs disjoints, et de même P''_i et P''_j sont d'intérieurs disjoints, pour $i, j \in \{1, \dots, k\}$ avec $i \neq j$.

Pour qu'un tel puzzle existe, il faut et il suffit que les aires de F' et F'' soient égales². Si F' et F'' sont donnés et ont la même aire, il est

¹Précisions concernant nos notations. Quand un pavage est décrit par une égalité du type $F' = \bigcup_{i \in I} P'_i$, aussi bien F' que les P'_i désignent des portions bien précises du plan, et il ne s'agirait pas de confondre un P'_i avec un translaté de ce P'_i . Au contraire, les pièces $P_1^{(0)}, \dots, P_k^{(0)}$ d'un puzzle sont des polygones dont seuls nous importent les angles et les longueurs des côtés, donc pas la position dans le plan ; ceci s'applique également aux pièces des collections \mathcal{P} apparaissant plus bas.

²L'affirmation est parfois connue sous le nom de *théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien* (formulé et démontré vers 1830). Elle est à la base de la théorie de Hilbert des aires des polygones plans, elle est aussi sous-jacente à plusieurs constructions dans les *Eléments* d'Euclide.

naturel de chercher un puzzle comme ci-dessus avec un nombre k de pièces minimum.

2.2. Une infinité d'exemples. A titre de premier exemple, montrons une figure qui est (presque ...) une démonstration du théorème de Pythagore. En référence à un triangle rectangle T , dont on note c la longueur de l'hypothénuse et a, b les longueurs des cathètes, on prend pour F' un carré de côté c et pour F'' la réunion de deux carrés de côtés a et b .

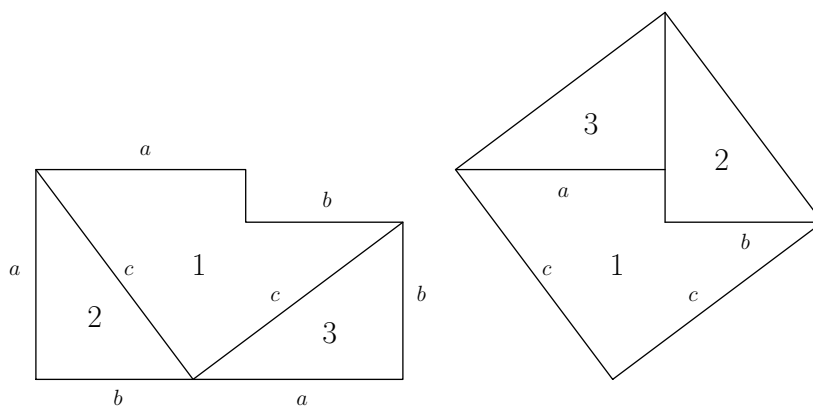


Figure 4 : le théorème de Pythagore (voir aussi [Peri] et [Cant–11]).

Cette “démonstration” indique que F' et F'' sont équidécomposables, avec $k = 3$ selon la notation utilisée plus haut.

Comme deuxième exemple, demandons comment il est possible d'équidécomposer un rectangle de côtés $A + a, B$ en un rectangle de côtés $A, B + b$, lorsque $(A + a)B = A(B + b)$ et $0 < a < A$. (La solution fait partie de la démonstration usuelle du théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien évoqué plus haut. Indication en fin d'article.)

Ces exemples font partie d'une liste qui peut être allongée à l'infini ; voir par exemple [Rous]. Bien que n'ayant aucune pratique de l'enseignement secondaire, j'imagine que ces problèmes d'équidécomposition ont une vertu appréciable : on en distingue facilement les données des solutions !

3. Une partie du 18e problème de Hilbert

En 1900, Hilbert formula 23 problèmes qui ont joué depuis un rôle important dans le développement des mathématiques [Hilb–00]. Le 18e problème, relatif à la géométrie usuelle, s'articule en trois parties,

dont la deuxième est un problème en dimension trois, la dimension de la cristallographie ; rappelons que c'est de la fin du XIXe siècle que date la classification des groupes de symétrie des cristaux³. Avant de formuler l'analogie en dimension deux de cette partie du 18e problème, quelques préliminaires.

Soit Γ un groupe de transformations du plan formé d'isométries, c'est-à-dire de translations, rotations, symétries axiales, et symétries glissantes⁴ ; dire que Γ est un groupe, c'est dire qu'il contient avec toute isométrie γ l'isométrie inverse γ^{-1} , et avec toute paire d'isométries γ_1, γ_2 la composition $\gamma_1\gamma_2$. On suppose qu'il existe un polygone plan $P^{(0)}$ qui est un *domaine fondamental* pour l'action de Γ , c'est-à-dire qui est tel que les images $\gamma(P^{(0)})$ de $P^{(0)}$ par les éléments γ de Γ recouvrent le plan, et que les intérieurs des images $\gamma(P^{(0)})$ de $P^{(0)}$ soient disjointes deux à deux. Un polygone $P^{(0)}$ est dit *isoèdre* s'il apparaît de cette manière, et *anisoèdre* sinon. Il résulte de la définition qu'un polygone isoèdre pave le plan. Le problème de Hilbert peut s'énoncer comme suit⁵ :

existe-t-il un polygone anisoèdre qui pave le plan ?

La réponse pour la dimension 3 fut trouvée en 1928 par Reinhardt, déjà cité ; elle est positive. La réponse pour la dimension 2, due à Heesch [Hees-35], est également positive ; voir la figure 5, et [Hees-35].

³Quand le temps d'une découverte scientifique arrive, on remarque souvent (a posteriori !) qu'elle est due simultanément et indépendamment à plusieurs auteurs. La classification des groupes cristallographiques illustre bien ce fait, puisqu'elle est due essentiellement indépendamment au Russe Evgraf Stepanovich Fedorov (1853-1919), à l'Allemand Arthur Moritz Schönflies (1853-1928) et à l'Anglais William Barlow (1845-1934). Notons encore que le minéralogiste Fedorov et le mathématicien Schönflies ont d'abord obtenu leurs résultats indépendamment, puis qu'ils les ont comparés avant publication et ont ainsi pu apporter chacun quelques corrections au travail de l'autre.

⁴Rappelons qu'une *symétrie glissante* du plan est une isométrie de la forme $\gamma = \sigma_d\tau_a = \tau_a\sigma_d$, composition de σ_d et τ_a (l'ordre n'importe pas), où σ_d est une symétrie relativement à un axe (= une droite) d du plan et où τ_a est une translation d'amplitude a dans la direction de d . Les symétries glissantes sont caractérisées parmi les isométries du plan par deux propriétés : elles n'ont aucun point fixe et elles renversent l'orientation.

⁵C'est plus exactement l'analogie en dimension 2 du problème formulé par Hilbert en dimension 3 : existe-t-il un polyèdre anisoèdre qui pave l'espace ? Ou plus exactement, copié de la page 99 de [Hilb-fr] : *Existe-t-il aussi des polyèdres qui NE se présentent PAS comme régions fondamentales de groupes de déplacement, et au moyen desquels cependant on peut, en juxtaposant convenablement les exemplaires congruents, arriver à remplir sans lacunes l'espace tout entier ?*

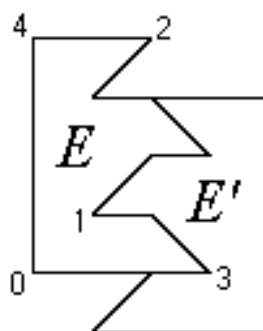


Figure 5 : emboîtement de deux décagones de Heesch.

On a trouvé depuis d'autres polygones anisoédres qui pavent le plan, dont certains pentagones convexes.

4. Une question de périodicité

4.1. **\mathcal{P} -pavages périodiques.** Dans les pavages discutés aux chapitres 1 et 3, tous les pavés sont isométriques. Abordons un cas plus général : étant donné une collection finie

$$\mathcal{P} = \{P_1^{(0)}, \dots, P_k^{(0)}\}$$

de polygones, convenons qu'un \mathcal{P} -pavage est un recouvrement sans chevauchement du plan

$$\mathbf{R}^2 = \bigcup_{i \in I} P_i, \quad \text{avec} \quad \overset{\circ}{P}_i \cap \overset{\circ}{P}_j = \emptyset \text{ si } i \neq j,$$

où chacun des polygones P_i est isométrique à l'un des $P_\ell^{(0)}$ et où $\overset{\circ}{P}_i$ désigne l'intérieur de P_i . La figure 6 indique un exemple de \mathcal{P} -pavage bien répandu, avec $k = 2$, la collection \mathcal{P} étant constituée d'un carré $P_1^{(0)}$ et d'un octogone régulier $P_2^{(0)}$.

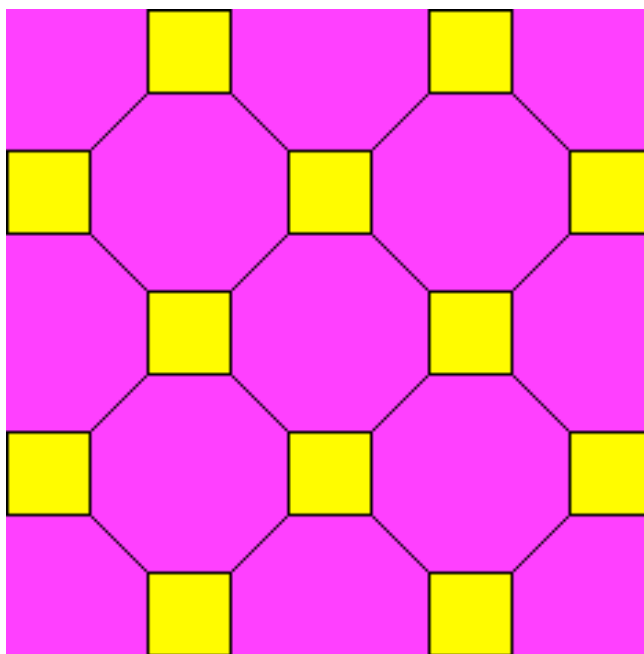


Figure 6 : pavage par carrés et octogones réguliers.

Un tel pavage est dit *périodique* s'il existe deux translations τ_1, τ_2 de directions différentes qui laissent le pavage *invariant*, c'est-à-dire telles que $\tau_1(P_i)$ soit un des P_j , et de même $\tau_2(P_i)$ soit un des P_j (un autre !), pour tout $i \in I$. Il est facile d'exhiber des collections \mathcal{P} pour lesquelles il existe d'une part des pavages périodiques et d'autre part des pavages non périodiques ; par exemple, si \mathcal{P} consiste en un seul polygone qui est un rectangle de côtés 1 et 2, on obtient

- un pavage périodique en subdivisant horizontalement chaque carré d'un quadrillage par carrés de côté 2,
- un pavage non périodique en subdivisant aléatoirement, horizontalement ou verticalement, chaque carré d'un quadrillage par carrés de côté 2,
- un autre pavage non périodique en subdivisant un carré horizontalement et tous les autres verticalement.

4.2. Le problème de Wang. Le problème suivant remonte à un travail du logicien Hao Wang, de 1961 ; il est lié à la question de savoir s'il existe un algorithme (ce qui est à peu près équivalent à la question de savoir s'il existe un programme d'ordinateur) qui, étant donné une famille finie \mathcal{P} de polygones, permet de savoir s'il existe un \mathcal{P} -pavage du plan. Voici l'énoncé du problème de Wang :

existe-t-il une famille $\mathcal{P} = \{P_1^{(0)}, \dots, P_k^{(0)}\}$ telle que

- il existe des \mathcal{P} -pavages du plan,
- il n'existe aucun \mathcal{P} -pavage périodique du plan ?

La réponse a sans doute surpris plus d'un expert : *oui, de telles collections \mathcal{P} existent*. Dans la première réponse (Berger, 1966) on avait $k > 1000$. Plus tard, on trouva d'autres réponses avec k plus petit, par exemple avec $k = 6$ (Robinson, 1971), ce qui permet de faire des dessins. La réponse aujourd'hui la plus célèbre est celle de Penrose, pour laquelle $k = 2$; voir [Penr-74] et [Gard-77]. (Une réponse essentiellement équivalente fut obtenue simultanément et indépendamment par Robert Ammann [Sene-04].) On peut en décrire plusieurs variantes, dont l'une est évoquée ci-dessous.

On ne connaît pas la réponse si on impose la condition $k = 1$ (tous les pavés isométriques),

ceci constitue un autre problème ouvert

captivant et important.

(Notons toutefois que, en dimension 3, une variante du problème est résolue depuis 1988. En effet, Conway et Schmitt ont décrit un polyèdre $P^{(0)}$ qui a les propriétés suivantes : (i) il existe un pavage de \mathbf{R}^3 par des polyèdres dont chacun est une image de $P^{(0)}$ par une isométrie préservant l'orientation, (ii) il n'existe aucun tel pavage de \mathbf{R}^3 qui soit invariant par une translation. Voir la description dans [Sene-95], ainsi que [Radi-95].)

5. Sur les pavages de Penrose

5.1. Définition des \mathcal{P}_A -pavages. Nous allons décrire une *variation* des pavages de Penrose. “Notre” famille \mathcal{P}_A est constituée de deux triangles isocèles à sommets coloriés, notés L_A et S_A (avec “L” pour “Large” et “S” pour “Small”), définis comme suit :

- les angles de L_A sont $\theta, 2\theta, 2\theta$, ses côtés $1, \varphi, \varphi$,
un des sommets de la base (d'angle 2θ) est blanc,
les deux autres sommets sont noirs ;
- les angles de S_A sont $3\theta, \theta, \theta$, ses côtés $\varphi, 1, 1$,
un des sommets de la base (d'angle θ) est noir,
les deux autres sommets sont blancs ;

où θ désigne l'angle $\pi/5$ (= un dixième de tour = 36°) et où

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033987\dots$$

désigne le *nombre d'or*. Nos descriptions de L_A et S_A illustrent les égalités trigonométriques

$$2 \cos(\theta) = \varphi \quad \text{et} \quad 2 \cos(2\theta) = \varphi^{-1} = \varphi - 1.$$

Notons pour la suite que chacun de ces triangles a un seul côté ayant deux extrémités de la même couleur, et nous l'appellerons le *côté distingué* du triangle. Notons aussi que les angles aux deux extrémités d'un côté distingué sont distincts, c'est-à-dire qu'il y en a un grand et un petit ; les côtés distingués sont *orientés*, du sommet de petit angle vers le sommet de grand angle.

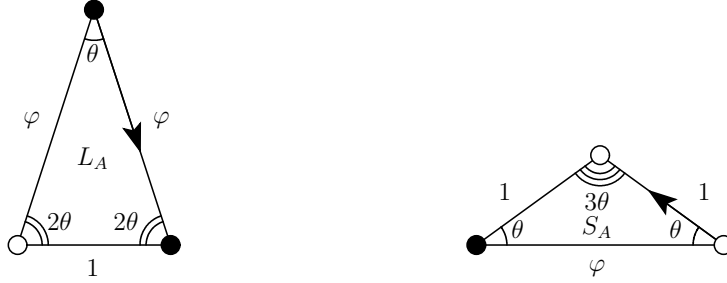


Figure 7 : les triangles L_A et S_A .

Convenons qu'un \mathcal{P}_A -pavage désigne ici un pavage strict $\mathbf{R}^2 = \bigcup_{i \in I} P_i$ dans lequel chaque P_i est un triangle à sommets coloriés, isométrique à l'un de L_A , S_A par une isométrie respectant les couleurs des sommets, deux tels triangles P_i et P_j étant toujours d'intérieurs disjoints, et avec de plus les conditions suivantes :

- (C1) chaque fois qu'un sommet d'un P_i coïncide avec un sommet d'un P_j , ces deux sommets sont de la même couleur,
- (C2) chaque fois qu'un côté distingué de P_i coïncide avec un côté distingué de P_j , l'orientation de ce côté dans P_i coïncide avec son orientation dans P_j .

A priori, il n'est nullement évident qu'il existe un seul \mathcal{P}_A -pavage du plan. Nous allons toutefois tenter d'indiquer pourquoi

- il existe des \mathcal{P}_A -pavages (il en existe même une infinité non dénombrable),
- mais il n'existe aucun \mathcal{P}_A -pavage périodique.

5.2. Sur l'apériodicité des \mathcal{P}_A -pavages. Introduisons une second famille \mathcal{P}_B , constituée de deux triangles isocèles à sommets coloriés, notés L_B et S_B , définis comme suit :

- les angles de L_B sont $3\theta, \theta, \theta$, ses côtés $\varphi^2, \varphi, \varphi$, un des sommets de la base (d'angle θ) est blanc, les deux autres sommets sont noirs ;
- les angles de S_B sont $\theta, 2\theta, 2\theta$, ses côtés $1, \varphi, \varphi$, un des sommets de la base (d'angle 2θ) est blanc, les deux autres sommets sont noirs.

Les triangles L_B et S_B ont également un côté distingué, qui est orienté.

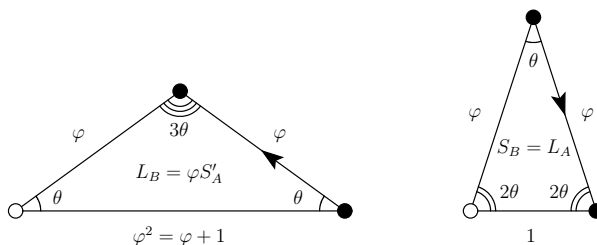


Figure 8 : les triangles L_B et S_B .

Il y a trois observations fondamentales à ne pas manquer :

- $S_B = L_A$,
- L_B est une juxtaposition d'une copie de L_A et d'une copie de S_A , la juxtaposition respectant les conditions (C1) et (C2),
- dans tout \mathcal{P}_A -pavage, le petit côté à extrémités noire et blanche d'une copie P' de S_A est nécessairement adjacent à la base d'une copie P'' de L_A et la réunion de P' et P'' est précisément une copie de L_B .

Il en résulte que, à partir de tout \mathcal{P}_A -pavage $\bigcup_{i \in I} P_i$ (supposé exister !), on peut définir de manière unique un \mathcal{P}_B -pavage $\bigcup_{j \in J} Q_j$ par copies isométriques de L_B et S_B , et satisfaisant aux conditions (C1) et (C2).

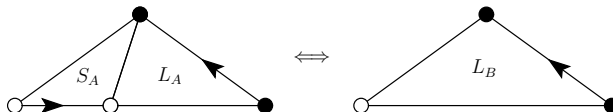


Figure 9 : illustration de l'observation (ii).

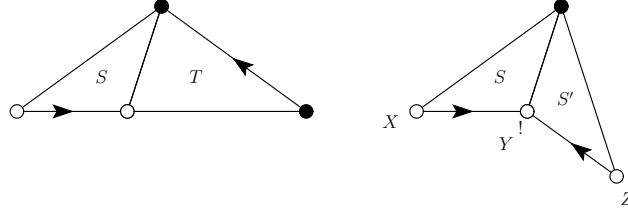


Figure 10 : illustration de l'observation (iii).

Avec un peu plus de temps, on montre de manière élémentaire que ce *processus d'inflation* peut se répéter, et fournit ainsi une suite infinie de pavages pour des familles $\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B, \mathcal{P}_C, \mathcal{P}_D, \dots$, suite qu'il est d'ailleurs préférable de noter désormais $(\mathcal{P}_{(n)})_{n \geq 1}$, avec $\mathcal{P}_{(n)} = \{L_{(n)}, P_{(n)}\}$, et $\mathcal{P}_{(0)} = \mathcal{P}_A$, $\mathcal{P}_{(1)} = \mathcal{P}_B$, etc. De plus, on constate que la famille $\mathcal{P}_{(n+4)}$ est la famille constituée des deux images des triangles du niveau n par une homothétie de rapport φ^2 , ce qui s'écrit aussi

$$L_{(n+4)} = \varphi^2 L_{(n)}, \quad S_{(n+4)} = \varphi^2 S_{(n)}$$

pour tout $n \geq 0$. (Si on ne s'occupe que des triangles, en oubliant la coloration des sommets et l'orientation des côtés distingués, on a $S_{(n+1)} = L_{(n)}$ et $L_{(n+1)} = S_{(n)} \cup L_{(n)}$. En revanche, si on tient compte des colorations et des orientations, la première valeur de $m > n$ pour laquelle $L_{(m)}$ et $S_{(m)}$ sont des copies homothétiques de $L_{(n)}$ et $S_{(n)}$ est bien $m = n + 4$.)

Voici l'argument qui exclut l'existence de $\mathcal{P}_{(0)}$ -pavage périodique. S'il en existait un, invariant par une translation τ , le $\mathcal{P}_{(n)}$ -pavage obtenu par n inflations serait également invariant par τ , pour tout $n \geq 1$. Pour n assez grand, les dimensions caractéristiques de tous les triangles de ce $\mathcal{P}_{(n)}$ -pavage seraient supérieures à l'amplitude de la translation τ , et ceci est absurde.

5.3. Sur l'existence des \mathcal{P}_A -pavages. L'argument est semblable à l'argument précédent, à la différence importante près qu'il convient de d'abord *subdiviser* au lieu de *recoller*.

Plus précisément, à partir de la paire $\mathcal{P}_{(0)} = \{L_{(0)} = L_A, S_{(0)} = S_A\}$, on définit une paire $\mathcal{P}_{(-1)} = \{L_{(-1)}, S_{(-1)}\}$ avec

- $L_{(-1)} = S_{(0)}$,
- $S_{(-1)}$ tel que $S_{(-1)}$ et $L_{(-1)}$ se recollent pour former $L_{(0)}$.

Il en résulte que, à partir d'un $\mathcal{P}_{(0)}$ -pavage, même partiel, c'est-à-dire un pavage d'une partie F du plan, on définit d'abord de manière unique un $\mathcal{P}_{(-1)}$ -pavage de cette même partie F , puis en itérant le procédé une famille de $\mathcal{P}_{(-n)}$ -pavages de F .

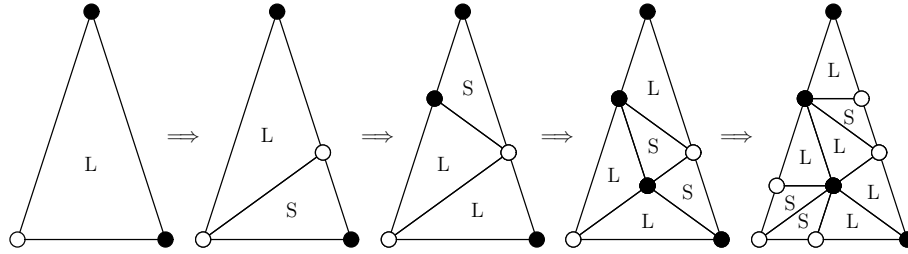


Figure 11 : $\mathcal{P}_{(-1)}$ -pavage, ..., $\mathcal{P}_{(-4)}$ -pavage de $F = L_A$.

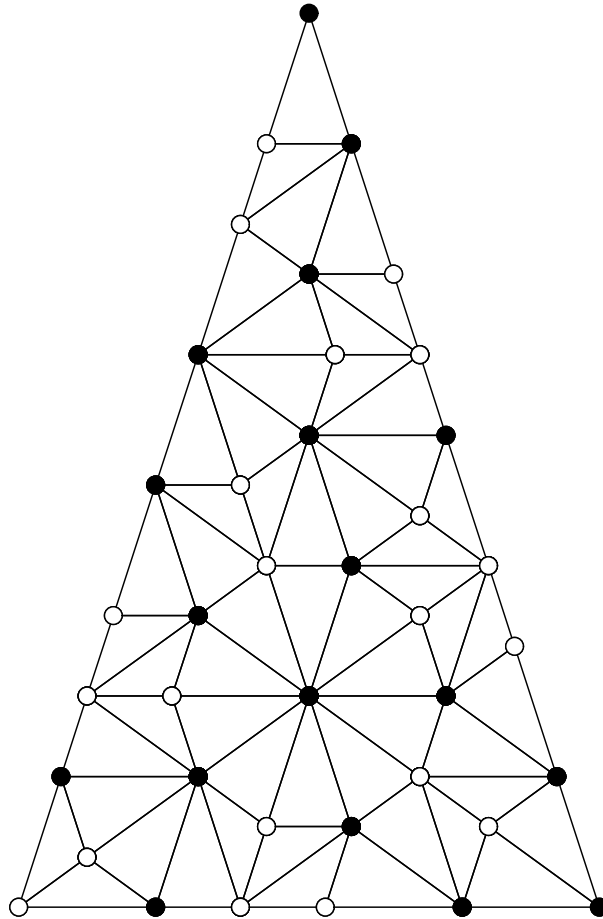


Figure 12 : $\mathcal{P}_{(-8)}$ -pavage du même triangle L_A .

On constate à nouveau que

$$L_{(-n-4)} = \varphi^{-2}L_{(-n)}, \quad S_{(-n-4)} = \varphi^{-2}S_{(-n)}$$

pour tout $n \geq 0$. Donc, en dilatant le $\mathcal{P}_{(-4n)}$ -pavage de L_A par le rapport convenable, qui est φ^{2n} , on obtient un $\mathcal{P}_{(0)}$ -pavage d'une copie homothétique $F_n := \varphi^n L_A$ de L_A , de plus en plus grande lorsque n croît. En observant qu'on peut ajuster les pavages de F_n et de F_{n+4} , on arrive à montrer qu'il existe un $\mathcal{P}_{(0)}$ -pavage du plan tout entier.

5.4. Quelques propriétés des \mathcal{P}_A -pavages. En exploitant les règles d'inflation et de décomposition, on peut montrer que :

- (a) il existe une infinité non dénombrable de \mathcal{P}_A -pavages non isométriques deux à deux⁶,
- (b) un \mathcal{P}_A -pavage ne possède jamais de symétrie de translation,
- (c) toute partie finie de tout \mathcal{P}_A -pavage se retrouve une infinité de fois dans tout autre \mathcal{P}_A -pavage,
- (d) dans tout \mathcal{P}_A -pavage, il existe des parties finies arbitrairement grandes qui possèdent *une symétrie de rotation d'ordre 5*,
- (e) à deux exceptions près, les \mathcal{P}_A -pavages ne possèdent globalement pas de symétrie d'ordre 5.

Il est frappant de comparer la condition (c) ci-dessus à un résultat fondamental de toute la cristallographie classique :

*pour tout pavage périodique du plan ou de l'espace,
l'ordre d'une rotation de l'espace laissant le pavage invariant
n'est jamais 5, plus précisément
l'ordre d'une telle rotation est l'un des entiers 1, 2, 3, 4, 6.*

Remarque.

Dans un \mathcal{P}_A -pavage du plan, les copies de L_A apparaissent nécessairement par paires adjacentes le long de leurs côtés distingués, et constituent ainsi des quadrilatères appelés *cerfs-volants* ; de même, les copies de S_A apparaissent nécessairement par paires le long de leurs côtés distingués, et constituent des *fléchettes*. Ainsi, tout pavage du plan par copies de L_A et S_A fournit un pavage du plan par cerfs-volants et fléchettes. On obtient aussi un pavage par deux types de losanges. Pour en voir plus, regarder par exemple

<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-penrose>

ou un nombre presque infini de pages web en tapant sur google "Penrose tiling".

⁶Deux \mathcal{P}_A -pavages $\bigcup_{i \in I} P_i$ et $\bigcup_{j \in J} Q_j$ du plan sont *isométriques* s'il existe une isométrie ψ du plan et une bijection $\nu : I \rightarrow J$ telle que $\psi(P_i) = Q_{\nu(i)}$ pour tout $i \in I$, l'isométrie ψ respectant les couleurs des sommets des polygones.

5.5. Usage des \mathcal{P} -pavages en physique des quasi-cristaux. Certains alliages métalliques peuvent prendre des formes *quasi-cristallines*, vues pour la première fois au microscope électronique par Dan Shechtman au matin du 8 avril 1982. La découverte était si révolutionnaire qu'elle fut incomprise et combattue pendant assez longtemps, de sorte que la première publication la relatant date de novembre 1984 [SBGC–84]. Les choses ont bien changé depuis 1982, puisque le prix Nobel de chimie 2011 a été décerné à Dan Shechtman pour sa découverte ; voir la remarquable page officielle [Nobel].

Pour obtenir un quasi-cristal, on peut par exemple refroidir très brutalement une goutte d'aluminium et de manganèse en proportions convenables. A l'observation par rayons X ou au microscope électronique, le matériau obtenu révèle des symétries d'ordre 5, en contradiction flagrante avec toute la cristallographie classique, aussi bien expérimentale que théorique. Pour lever la contradiction, il faut admettre que le matériau obtenu n'a pas de structure cristalline ; il s'agit d'un nouveau type de structure, dite quasi-cristalline, qui a enrichi la théorie de la physique du solide.

Les modèles utilisés depuis pour comprendre ces quasi-cristaux font un large appel à des pavages non périodiques, qui partagent avec les quasi-cristaux la propriété d'exhiber un *ordre qui est à la fois à grande distance et non périodique*.

Les pavages de type Penrose sont encore aujourd'hui l'objet de nombreuses recherches et de vulgarisations diverses.

6. Quelques autres développements

Jusqu'ici dans cet exposé, quand il s'agissait de comparer deux polygones (ou polyèdres) ou deux pavages, la comparaison se faisait toujours à l'aide d'isométries, c'est-à-dire d'éléments d'un groupe G , qui est le groupe $\text{Iso}(E^2)$ de toutes les isométries⁷ du plan euclidien E^2 , ou le groupe $\text{Iso}(E^3)$ de toutes les isométries de l'espace euclidien E^3 . Or il est intéressant de varier l'espace et le groupe !

⁷Voici une liste, complète et sans répétition, des éléments de ce groupe :

- (id) l'identité,
- (tr) les translations (autres que l'identité), une par vecteur non nul du plan
- (rot) les rotations (autres que l'identité), une par couple (C, ψ) formé d'un centre C dans le plan et d'un angle $\psi \in]0, 2\pi[$,
- (sim) les symétries axiales, une par droite du plan,
- (sgl) les symétries glissantes, une par couple (d, a) formé d'une droite orientée d et d'une amplitude $a > 0$.

Pour les symétries glissantes, voir la note 4.

Depuis la découverte de la géométrie hyperbolique au cours du XIXe siècle (Gauss, Lobatchevski, Bolyai, Poincaré, Klein, ...) ⁸, on peut étudier des pavages de l'espace hyperbolique H^n de dimension n , dont le groupe d'isométrie $G = \text{Iso}(H^n)$ a des propriétés bien différentes de celles de $\text{Iso}(E^n)$. En particulier, l'artiste hollandais Maurits Cornelis Escher (1898–1972) s'est rendu célèbre en créant (notamment) de multiples pavages du plan hyperbolique.



Figure 13 : gravure sur bois (Escher, 1958).

Le sujet a aussi vu de belles contributions du mathématicien Harold Scott MacDonald Coxeter (1907–2003).

Ne serait-ce que pour mentionner qu'il existe une activité récente dans ce domaine, citons un article [MaMo–98] dans lequel les auteurs décrivent une méthode (il en existe d'autres) pour construire des

⁸Et ce n'est pas fini ! Thurston a changé notre compréhension de la géométrie hyperbolique, notamment par son cours à Princeton de la fin des années 1970. Plus récemment, la "conjecture de géométrisation" de Thurston a été démontrée dans trois textes rendus publics en 2002 et 2003 par Grisha Perelman. Cette conjecture – maintenant un théorème – implique que toute variété de dimension 3 est constituée de pièces munies de géométries, parmi lesquelles la géométrie hyperbolique joue le premier rôle.

pavages apériodiques du plan hyperbolique. Un pavage de H^2 est dit périodique s'il existe un groupe d'isométries $\Gamma \subset \text{Iso}(E^2)$ qui d'une part laisse le pavage invariant et pour lequel d'autre part il existe une partie compacte K de H^2 telle que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(K) = H^2$.

Par exemple : soit T un triangle hyperbolique isocèle d'angles α, β, β tels que $5\alpha + 8\beta = 2\pi$, et tels que α ne soit pas un multiple rationnel de π . Il existe un pavage du plan hyperbolique par copies isométriques de T , mais il n'existe aucun tel pavage qui soit de plus périodique.

Le groupe G de transformation de l'espace à paver X n'a pas besoin d'être un groupe d'isométries ! Parmi les exemples standards, mentionnons le groupe des *transformations affines* de l'espace \mathbf{R}^n , ou le groupe des *transformations projectives* de l'espace projectif $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^n$. Ce dernier cas a fait l'objet de plusieurs travaux récents d'Yves Benoist, dont on peut trouver la liste sur sa page web [Benoist] ; voir en particulier son article de vulgarisation [Beno-01].

REFERENCES

- [Beno-01] Yves BENOIST, *Pavages du plan*, Journées X-UPS des 14 & 15 mai 2001,
<http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups01.01.pdf>
- [Benoist] Yves BENOIST, *Page web*,
<http://www.math.u-psud.fr/~benoist/>
- [Cant-11] Serge CANTAT, *Découpage d'Airy et théorème de Pythagore*, Site "images des mathématiques",
<http://images.math.cnrs.fr/Decoupage-d-Airy-et-theoreme-de.html>
- [Gard-77] Martin GARDNER, *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, Scientific American **236** (1977) 110–121.
- [Ghys-11] Etienne GHYS, *L'énigme des pentagones*, Images des mathématiques, 28 octobre 2011
<http://images.math.cnrs.fr/L-enigme-des-pentagones.html>
- [GrSh-86] Branko GRÜNBAUM et Geoffrey C. SHEPHARD, *Tilings and patterns*, Freeman and Co, 1987.
- [Haml-16] Alfred Dwight Foster HAMLIN, *A history of ornament, ancient and medieval*, New York, The Century Co., 1916.
- [HaKw-11] Pierre DE LA HARPE, *Prix Nobel de chimie, quasi-cristaux, périodicité et pavages de Penrose*, Images des mathématiques, 28 octobre 2011
<http://images.math.cnrs.fr/Prix-Nobel-de-chimie-quasi.html>
- [Hees-35] H. HEESCH, *Aufbau der Ebene aus kongruenten Bereichen*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (2) **1** (1935), 115–117. Traduction anglaise en ligne :
<http://www.angelfire.com/mn3/anisohedral/heesch35.html>
- [Hilb-00] David HILBERT, *Mathematische Probleme*, deuxième congrès international des mathématiciens, Paris, 1900. Göttingen Nachrichten, 1900. En ligne (original et traduction anglaise) :
<http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~kersten/hilbert/rede.html>
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html#prob18>

- [Hilb-fr] David HILBERT, *Sur les problèmes futurs des Mathématiques*, traduction de M.L. Laugel, Compte Rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900, Gauthier-Villars (1902), 58–114 (traduction de [Hilb-00]).
- [MaMo-98] Gennadi MARGULIS and Shahar MOZES, *Aperiodic tilings of the hyperbolic plane by convex polygons*, Israel Journal of Mathematics **107** (1998), 319–325.
- [Jone-56] Owen JONES, *The grammar of ornament*, 1856 (et van Nostrand, 1982).
- [Nobel] NOBELPRIZE.ORG, *The Nobel Prize in Chemistry 2011*, http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/2011/info.html
- [Penr-74] Roger PENROSE, *The rôle of aesthetics in pure and applied mathematical research*, Bull. Inst. Math. Appl. **10** (1974), 266–271. Voir aussi, du même : *Set of tiles for converging a surface*, brevet, 9 janvier 1979, <http://v3.espacenet.com/publicationDetails/biblio?CC=US&NR=4133152&KC=&FT=E>
- [Peri] Perigal’s Proof of the Pythagorean Theorem, <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Perigal.shtml>
- [Radi-95] Charles RADIN, *Aperiodic tilings in higher dimensions*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3543–3548.
- [Rein-18] Karl REINHARDT, *Über die Zerlegung der Ebene in Poygone*, Dissertation der Naturwiss. Fakultät, Universität Frankfurt/Main, Borna, 1918. Voir aussi Béla BOLLOBÁS, *Filling the plane with congruent convex hexagons without overlapping*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **6** (1963), 117–123.
- [Rous] *Dissections de polygones, réguliers ou non réguliers*, dossier proposé par Alain ROUSSEAU, en particulier la “liste des animations”, <http://www.cabri.net/abracadabri/abraJava/Dissection/ListDiss.html>
- [SBGC-84] D. SHECHTMAN, I. BLECH, D. GRATIAS, and J. W. CAHN, *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984), 1951–1953.
- [Sene-95] Marjorie SENECHAL, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge University Press, 1995.
- [Sene-04] Marjorie SENECHAL, *The mysterious Mr. Ammann*, Mathematical Intelligencer **26** (2004), 10-21
<http://www.springerlink.com/content/ct873r41m7605p44/fulltext.pdf>
http://tilings.math.uni-bielefeld.de/substitution_rules/ammann_beenker
- [Weyl-52] Hermann WEYL, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.

Indication pour la solution du deuxième exemple du chapitre 2. Relativement à des coordonnées cartésiennes, considérons les deux rectangles de sommets

$$\begin{aligned} 0 &= (0, 0), & X &= (A, 0), & Y &= (A, B + b), & Z &= (0, B + b) \\ 0 &= (0, 0), & X' &= (A + a, 0), & Y' &= (A + a, B), & Z' &= (0, B) \end{aligned}$$

respectivement. Si $0 < a < A$, le segment ZX' coupe le segment $Z'Y'$ en un point S et le segment XY en un point T . Si $A(B+b) = (A+a)B$, les segments ZX' et YY' sont parallèles. En déplaçant le triangle $Z'SZ$ en $XX'T$ et le triangle ZTY en $SX'Y'$, on obtient une équidécouposition des rectangles $OXYZ$ et $OX'Y'Z'$.