Mathématiques et Cuisine
de la cuisine au laboratoire de mathématiques

Valerio Vassallo

Université Lille 1

Université Lille1 Sciences et Technologies

IREM de Lille

IREM Lille

Mathématiques et Société - Neuchâtel - Mercredi 23 mai 2012

Bienvenue

Bibliothèque

Bibliographie

- Maxine Clark, *Cuisine italienne*, Collection Les grands guides gourmands
- *La cuillère d'argent*, Phaidon Press Ltd.
- *L'encyclopédie culinaire de la maîtresse de maison*, 1971, Culture, art et loisirs
- Philippe Jobin & Bernard Van Leckwyck, *Le Café*, Éditions Nathan
- *101 ricette tradizionali per cucinare gli spaghetti*, Mistral

Bibliographie

- Nicolas Rouche, *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?*, L'esprit des sciences, Ellipses
- Nicolas Rouche, *Le sens de la mesure*, Formation, Didier Hatier
- Enrico Giusti, *La matematica in cucina*, Bollati Boringhieri (collana Saggi. Scienze)
- Daniel Perrin, *Mathématiques d'école : Nombres, mesures et géométrie*, Cassini
- Piergiorgio Odifreddi, *Les mathématiques à l'aube du XXIème siècle*, Belin

Bibliographie

- Hippolyte Commissaire et Georges Cagnac, *Cours de mathématiques spéciales, Tome I, Eléments d'algèbre et de géométrie analytique*, Editions Jacques Gabay
- M. Spiegel , *Meccanica razionale ; 720 problemi risolti*, Schaum
- Richard Courant and Herbert Robbins, *What Is Mathematics ? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Ian Stewart (Editor), Oxford University Press
- William S. Massey, *Algebraic Topology : An Introduction*, Springer
- Boris Bekker, *Partage d'un carré en triangles d'aires égales*, OUVERT 76, IREM de Strasbourg
- Exposition *Boules et Bulles*, Cité des Géométries de Maubeuge

Des maths un peu partout...

Des maths un peu partout. . .

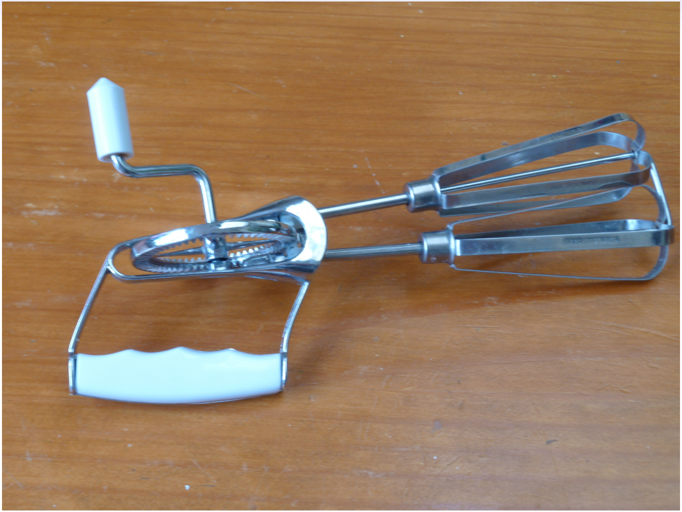
Des maths un peu partout...

Des maths un peu partout. . .

Des maths un peu partout. . .

Des maths un peu partout. . .

Des maths un peu partout...



Des maths un peu partout...

Surfaces usuelles

Surfaces usuelles

Surfaces usuelles

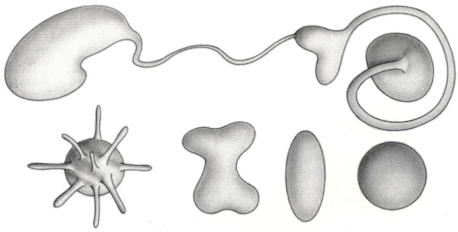
Surfaces usuelles

Surfaces usuelles

Définitions

Type topologique

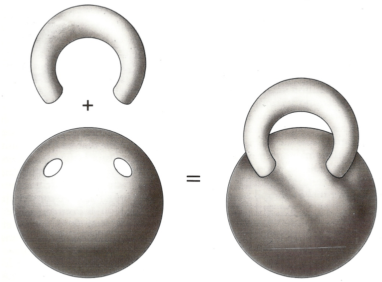
Deux surfaces (supposées en caoutchouc) ont le même *type topologique* si l'on peut passer de l'une à l'autre en les étirant quitte, éventuellement, à laisser certaines parties se traverser mutuellement mais sans déchirer, ni couper, ni coller.



Définitions

Genre

On dit qu'une surface est de *genre g* si elle est du type topologique de la sphère à g anses.



$g = 1$

Genres

$g = 0$

$g = 1$

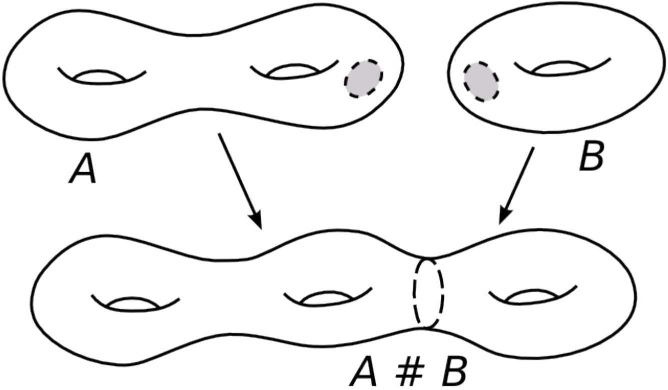
$g = 2$

$g = 3$

Somme connexe

Somme connexe

Somme connexe



Classification des surfaces

Théorème

Tout surface compacte est homéomorphe soit à une sphère, soit à une somme connexe de tores, soit à une somme connexe de plans projectifs.

Genres

$g = 0$

$g = 1$

$g = 2$

$g = 3$

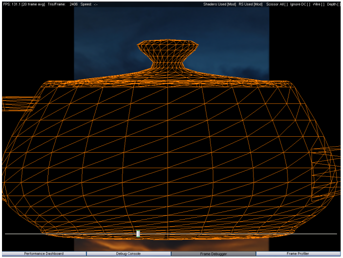
Somme connexe

Quel est le lien entre ces deux surfaces ?

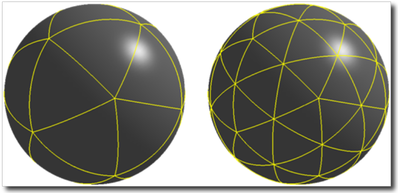
L’outil : la triangulation

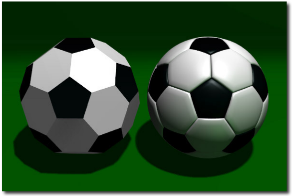
Prenons par exemple une théière.

Triangulation d'une théière



Triangulation d'une sphère





Triangulation d'une sphère

Polygones

Ligne polygonale fermée

Une ligne polygonale fermée est un ensemble de segments deux à deux consécutifs dont les extrémités coïncident.

Polygones

Ligne polygonale fermée

Une ligne polygonale fermée est un ensemble de segments deux à deux consécutifs dont les extrémités coïncident.

Polygone

Un polygone est ligne polygonale fermée dont les segments sont non adjacents, sans cycle.

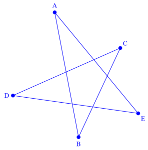
Polygones

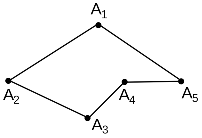
Ligne polygonale fermée

Une ligne polygonale fermée est un ensemble de segments deux à deux consécutifs dont les extrémités coïncident.

Polygone

Un polygone est ligne polygonale fermée dont les segments sont non adjacents, sans cycle.





Polygones particuliers

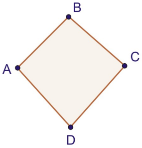
Polygone convexe

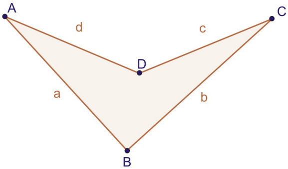
Dans un polygone convexe, chaque segment ou arête permet de découper le plan en deux demi-plans : l'un contenant entièrement le polygone, l'autre vide.

Polygones particuliers

Polygone convexe

Dans un polygone convexe, chaque segment ou arête permet de découper le plan en deux demi-plans : l'un contenant entièrement le polygone, l'autre vide.





Angle

Deux segments consécutifs définissent un angle.

Polygones réguliers

Polygone régulier

Un polygone régulier est un polygone convexe dont

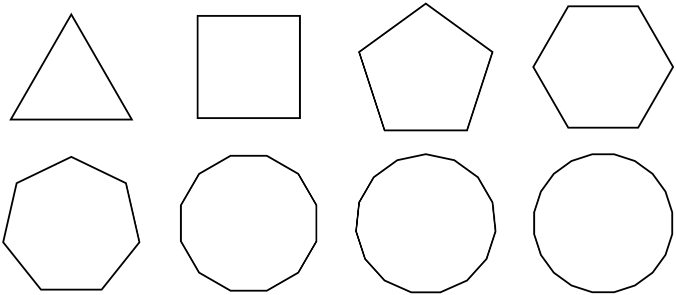
- tous les segments sont de même longueur,
- tous les angles sont de même mesure.

Polygones réguliers

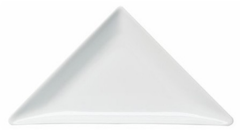
Polygone régulier

Un polygone régulier est un polygone convexe dont

- tous les segments sont de même longueur,
- tous les angles sont de même mesure.



Exemples déformés dans ma cuisine

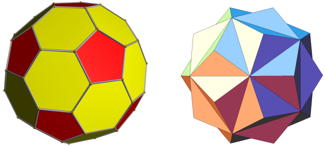



Exemples

Polyèdres

Polyèdre

Un polyèdre est une forme géométrique à trois dimensions (un solide) ayant des faces planes polygonales qui se rencontrent selon des segments de droite qu'on appelle arêtes.



Polyèdre convexe

Dans un polyèdre convexe, chaque face permet de découper l'espace en deux demi-espaces : l'un contenant entièrement le polyèdre, l'autre "vide".

Polyèdres réguliers

Angle

On peut définir pour chaque sommet d'un tétraèdre une notion d'*angle*.

Polyèdre régulier

Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont

- tous les faces sont des polygones réguliers identiques,
- tous les *angles* sont de même mesure.

Polyèdres réguliers

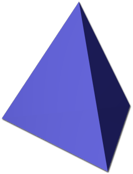
Angle

On peut définir pour chaque sommet d'un tétraèdre une notion d'*angle*.

Polyèdre régulier

Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont

- tous les faces sont des polygones réguliers identiques,
- tous les *angles* sont de même mesure.



Formule d'Euler

Théorème

Pour tout polyèdre convexe on la relation suivante :

$$F - A + S = 2$$

où F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S désigne le nombre de sommets.

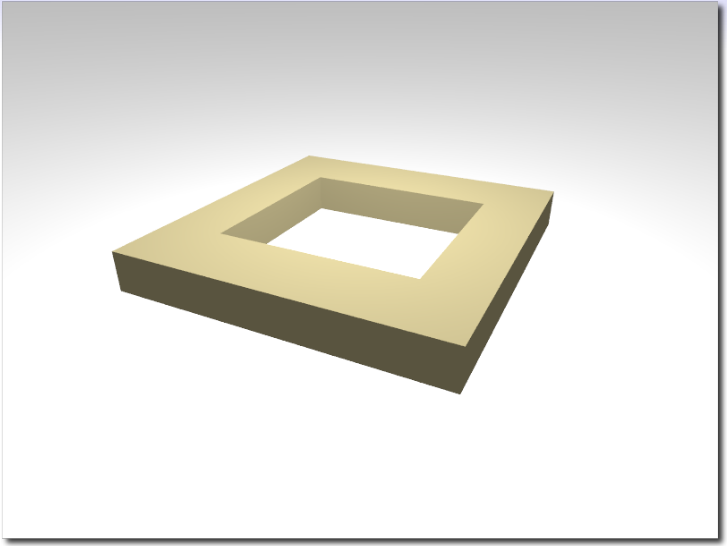
Théorème

Pour tout polyèdre de genre g on la relation suivante :

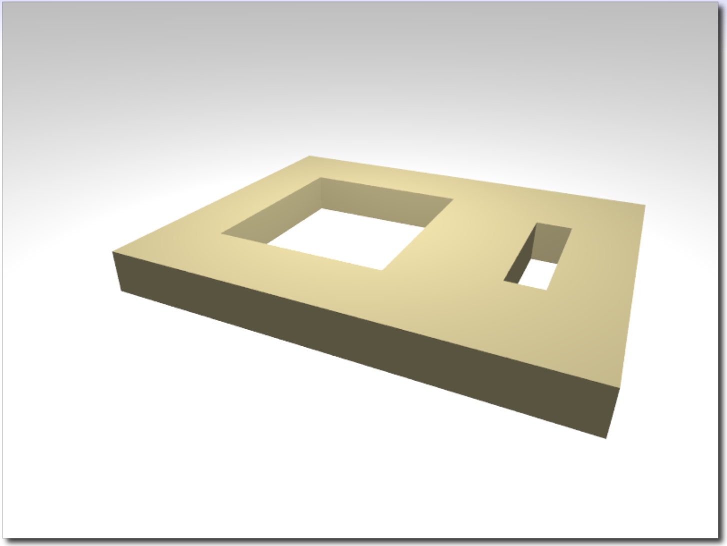
$$F - A + S = 2 - 2g$$

où F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S désigne le nombre de sommets.

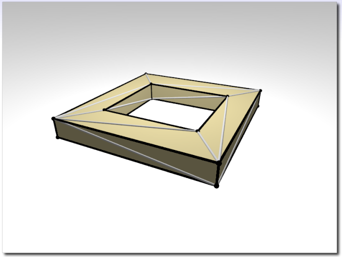
Formule d’Euler

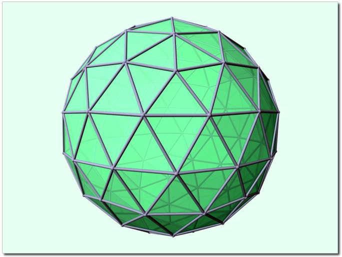


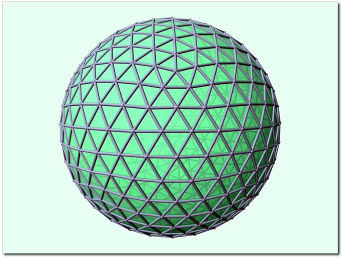
Formule d'Euler



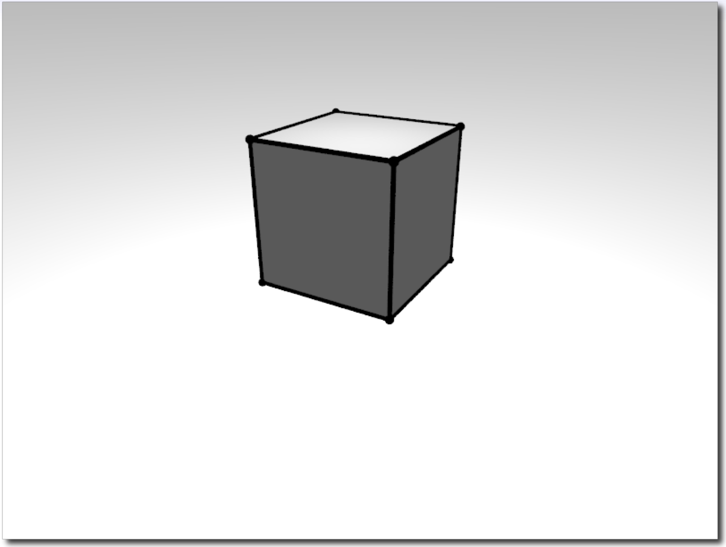
Un peu d'exercice. . .



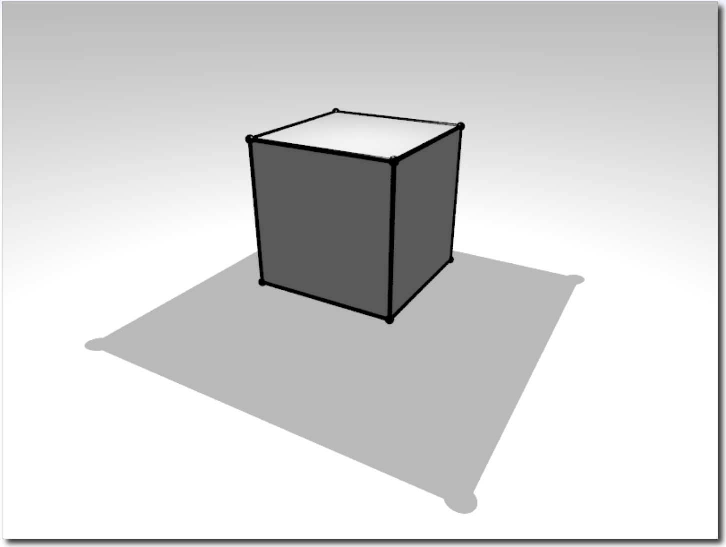




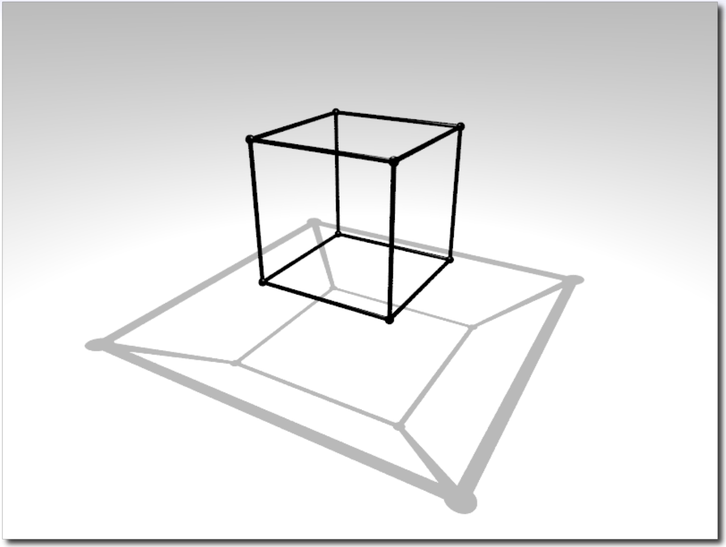
Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



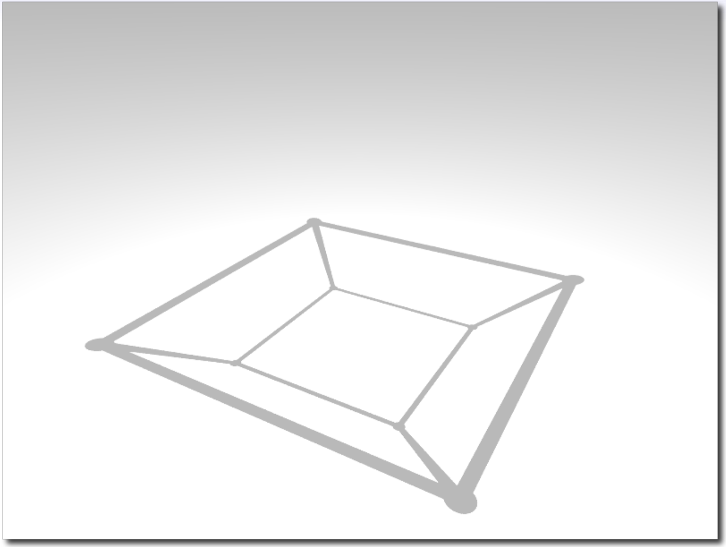
Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



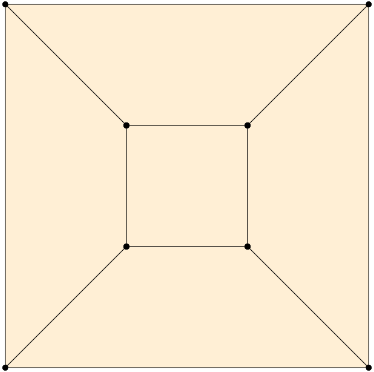
Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)

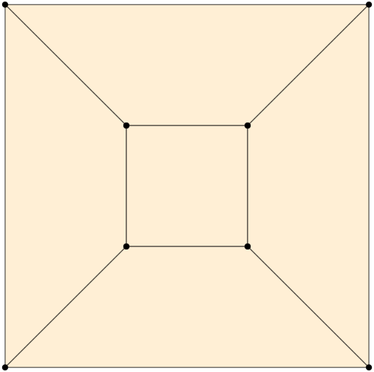


Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



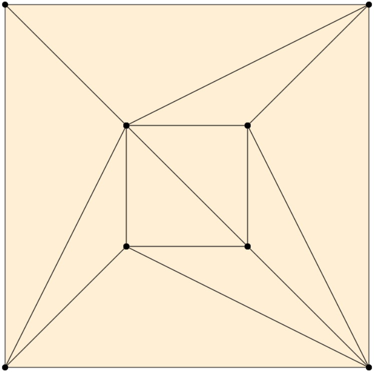
$$f - a + s =$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



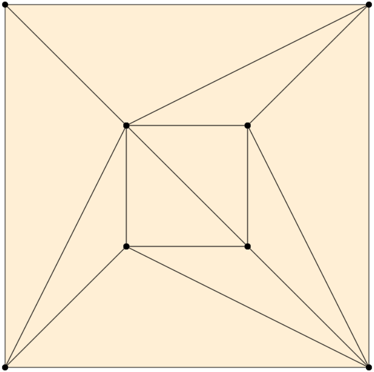
$$f - a + s = 5 - 12 + 8 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



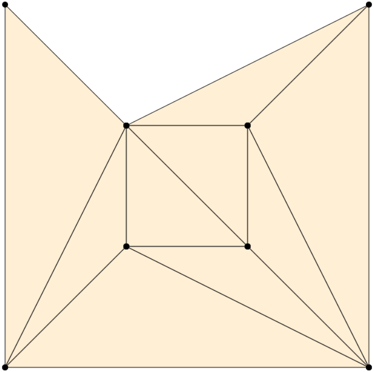
$f - a + s =$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



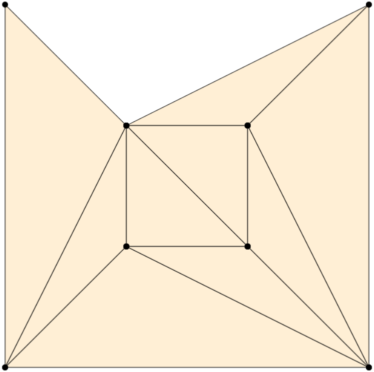
$$f - a + s = (2 * 5) - (12 + 5) + 8 = 10 - 17 + 8 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



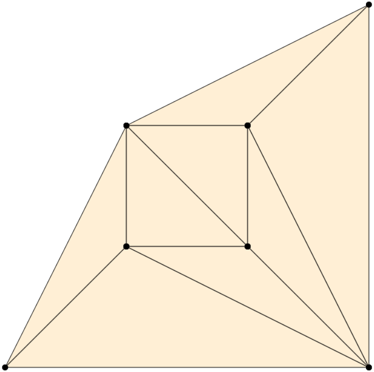
$f - a + s =$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



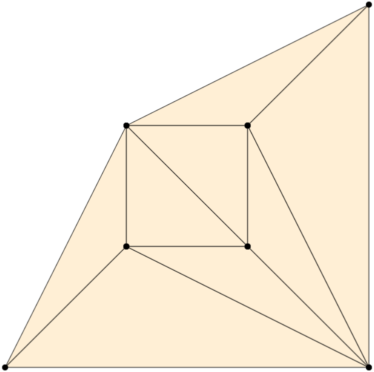
$$f - a + s = (10 - 1) - (17 - 1) + 8 = 9 - 16 + 8 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



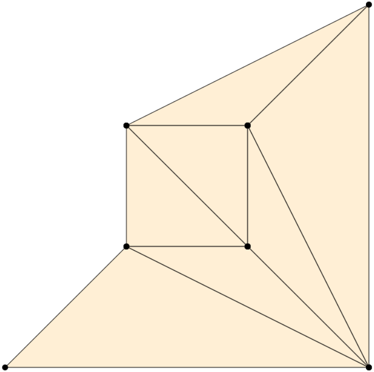
$f - a + s =$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



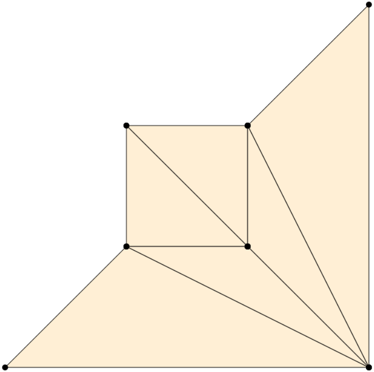
$$f - a + s = (9 - 1) - (16 - 2) + (8 - 1) = 8 - 14 + 7 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



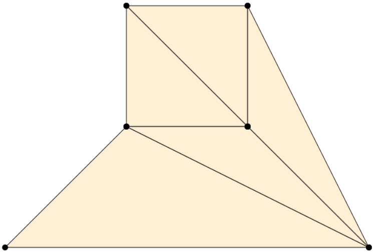
$$f - a + s = (8 - 1) - (14 - 1) + 7 = 7 - 13 + 7 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



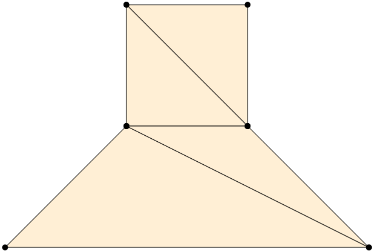
$$f - a + s = (7-1) - (13-1) + 7 = 6 - 12 + 7 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



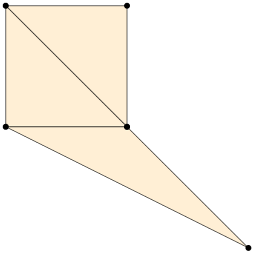
$$f - a + s = (6-1) - (12-2) + (7-1) = 5 - 10 + 6 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



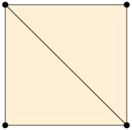
$$f - a + s = (5 - 1) - (10 - 1) - 6 = 4 - 9 + 6 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



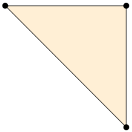
$$f - a + s = (4-1) - (9-2) + (6-1) = 3 - 7 + 5 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



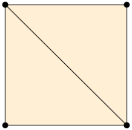
$$f - a + s = (3 - 1) - (7 - 2) + (5 - 1) = 2 - 5 + 4 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



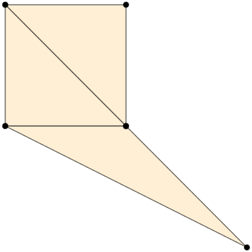
$$f - a + s = (2-1) - (5-2) + (4-1) = 1 - 3 + 3 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



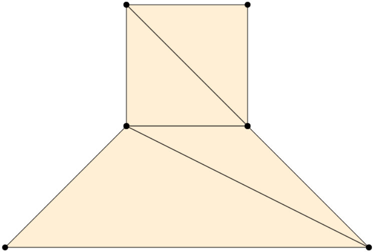
$$f - a + s = (1 + 1) - (3 + 2) + (3 + 1) = 2 - 5 + 4 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



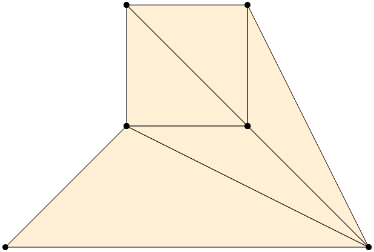
$$f - a + s = (2+1) - (5+2) + (4+1) = 3 - 7 + 5 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



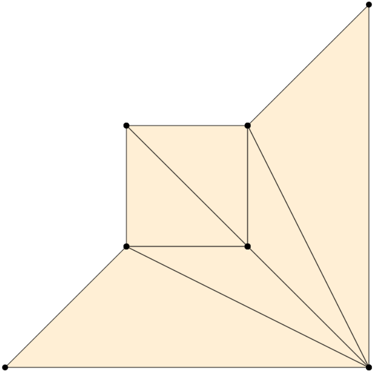
$$f - a + s = (3 + 1) - (7 + 2) + (5 + 1) = 4 - 9 + 6 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



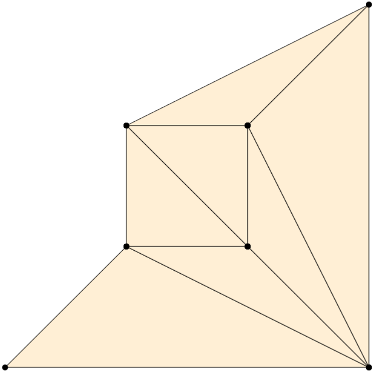
$$f - a + s = (4+1) - (9+1) - 6 = 5 - 10 + 6 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



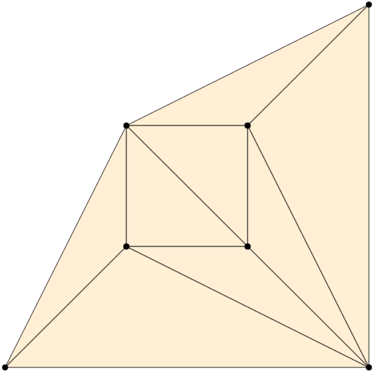
$$f - a + s = (5+1) - (10+2) + (6+1) = 6 - 12 + 7 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



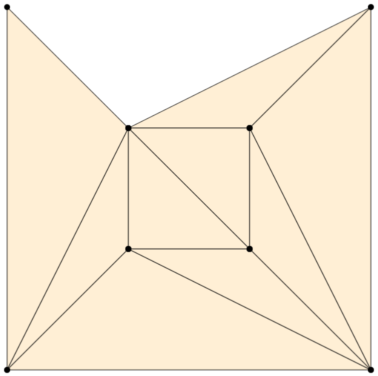
$$f - a + s = (6+1) - (12+1) + 7 = 7 - 13 + 7 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



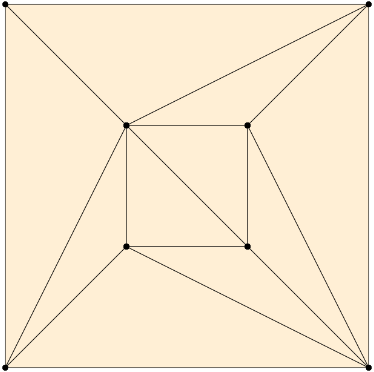
$$f - a + s = (7+1) - (13+1) + 7 = 8 - 14 + 7 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



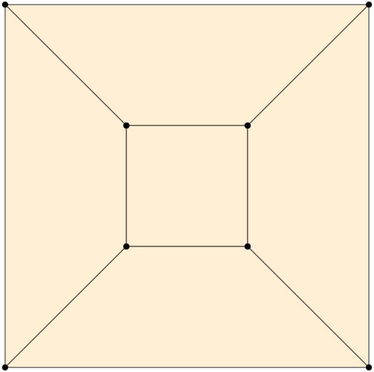
$$f - a + s = (8 + 1) - (14 + 2) + (7 + 1) = 9 - 16 + 8 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



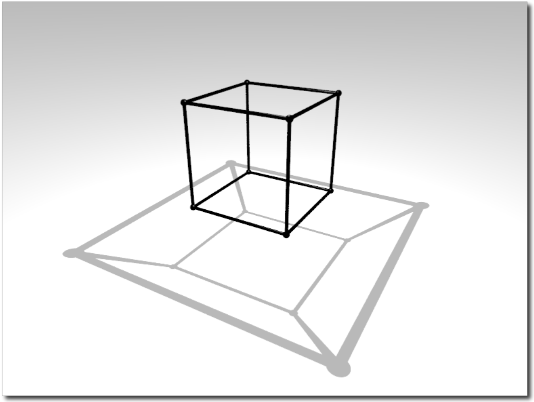
$$f - a + s = (9 + 1) - (16 + 1) + 8 = 10 - 17 + 8 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



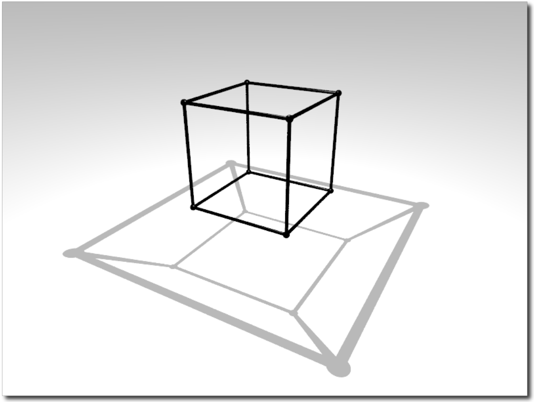
$$f - a + s = (10/2) - (17 - 5) + 8 = 5 - 12 + 8 = 1$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



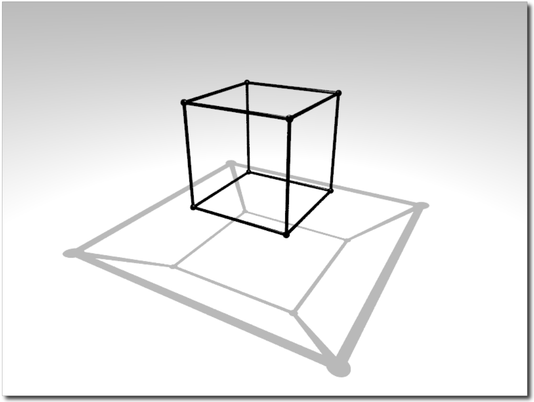
$$F - A + S =$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



$$F - A + S = (f - a + s) + 1 =$$

Idée de la preuve d'Augustin Cauchy (1809)



$$F - A + S = (f - a + s) + 1 = 1 + 1 = 2$$

Question

Existe-t-il beaucoup de polyèdres réguliers ?

Étude

Formule d'Euler : $F - A + S = 2$

Étude

Formule d'Euler : $F - A + S = 2$

On suppose que

- chaque face possède n côtés,
- que chaque sommet est atteint par r arêtes.

Étude

Formule d'Euler : $F - A + S = 2$

On suppose que

- chaque face possède n côtés,
- que chaque sommet est atteint par r arêtes.

On remarque que

- chaque arête délimite deux faces : $nF = 2A$,
- chaque arête contient deux sommets : $rS = 2A$.

$$\frac{2A}{n} - A + \frac{2A}{r} = 2 \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}.$$

Solutions

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$$

- n et r sont des entiers plus grands que 3,

Solutions

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$$

- n et r sont des entiers plus grands que 3,
- n et r ne peuvent pas être tous les deux plus grands que 4,

Solutions

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$$

- n et r sont des entiers plus grands que 3,
- n et r ne peuvent pas être tous les deux plus grands que 4,
- si $n = 3$ alors r est inférieur 5 car $\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$, ce qui donne des polyèdres à face triangulaire (triangle équilatéral) ayant 6, 12 ou 30 faces,

Solutions

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$$

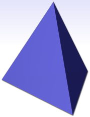
- n et r sont des entiers plus grands que 3,
- n et r ne peuvent pas être tous les deux plus grands que 4,
- si $n = 3$ alors r est inférieur 5 car $\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$, ce qui donne des polyèdres à face triangulaire (triangle équilatéral) ayant 6, 12 ou 30 faces,
- si $r = 3$ alors n est inférieur 5 car $\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$, ce qui donne des polyèdres desquels de chaque sommet partent 3 arêtes et qui ont 6, 12 ou 30 faces.

Solutions

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}+\frac{1}{A}$$

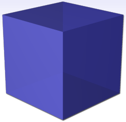
- n et r sont des entiers plus grands que 3,
- n et r ne peuvent pas être tous les deux plus grands que 4,
- si $n=3$ alors r est inférieur 5 car $\frac{1}{r}-\frac{1}{6}=\frac{1}{A}$, ce qui donne des polyèdres à face triangulaire (triangle équilatéral) ayant 6, 12 ou 30 faces,
- si $r=3$ alors n est inférieur 5 car $\frac{1}{n}-\frac{1}{6}=\frac{1}{A}$, ce qui donne des polyèdres desquels de chaque sommet partent 3 arêtes et qui ont 6, 12 ou 30 faces.
- et c'est tout !

Solides de Platon



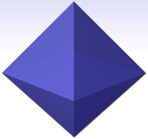
Tétraèdre

$n = 3, \; r = 3$



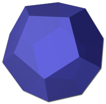
Cube

$n = 4, \; r = 3$



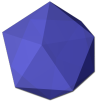
Octaèdre

$n = 3, \; r = 4$



Dodécaèdre

$n = 5, \; r = 3$



Icosaèdre

$n = 3, \; r = 5$

Pommes de Platon

Des segments. . .

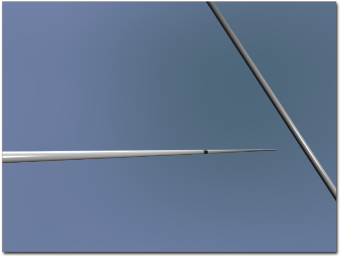
Des segments. . .

Des segments. . .

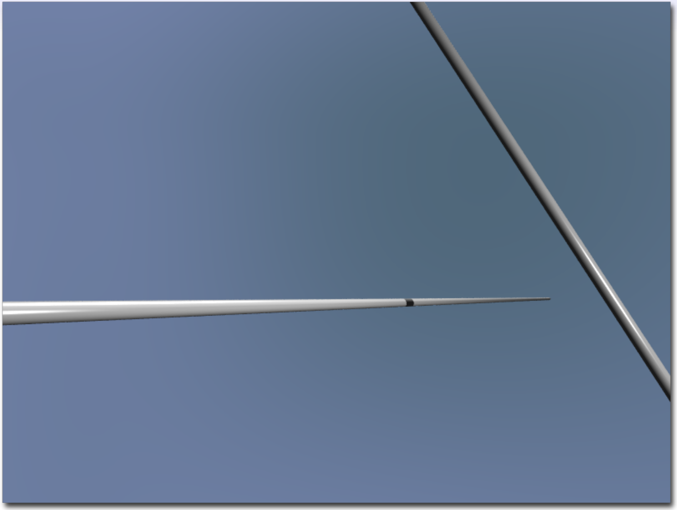
Des droites...

Questions

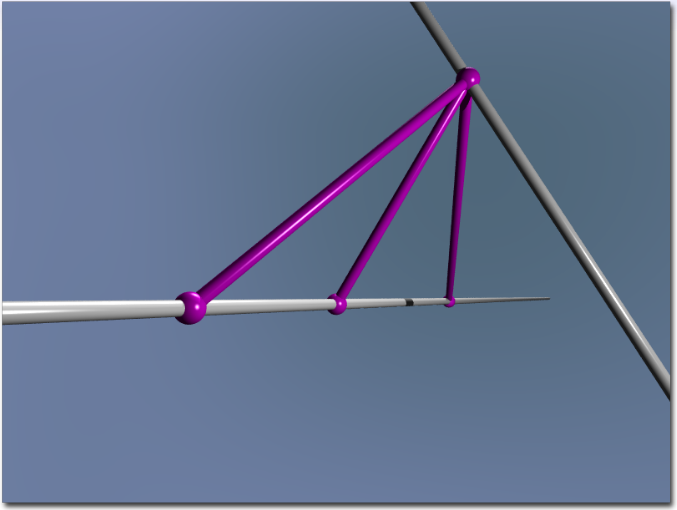
- Comment définir la position relative de deux droites ou de deux plans dans l'espace ?
- Comment calculer la distance entre deux droites dans l'espace ?



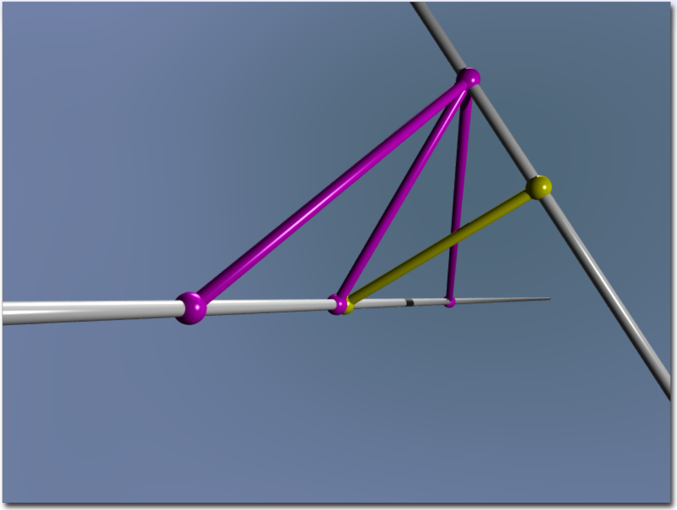
Des segments. . .



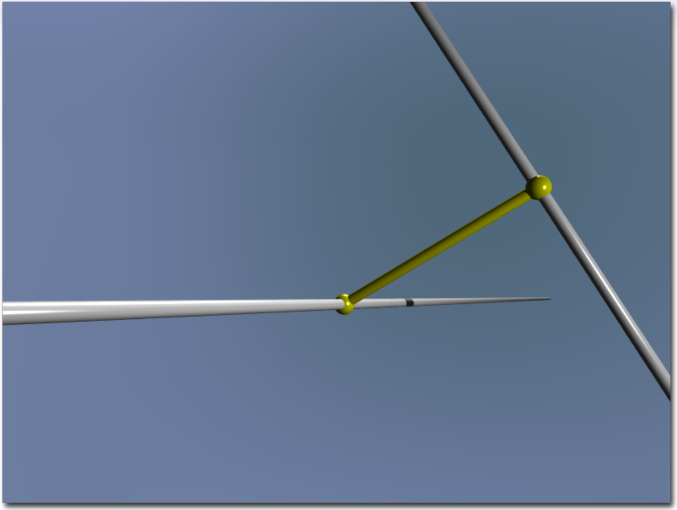
Des segments. . .



Des segments. . .



Des segments. . .



Des cercles. . . concentriques

Des cercles. . . concentriques, tangents

Des cercles. . . concentriques, tangents, bi-tangents

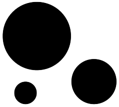
Des cercles. . . concentriques, tangents, bi-tangents, tri-tangents

Des cercles... concentriques, tangents, bi-tangents

Des cercles. . .

Questions

- Combien existe-t-il de cercles tangents à trois cercles donnés ?
- Peut-on construire ces cercles aux instruments ?



Problème d'Apollonius de Perge (262 av. J.-C.-190 av. J.-C)

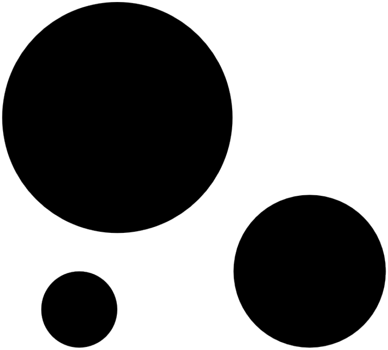
Équations

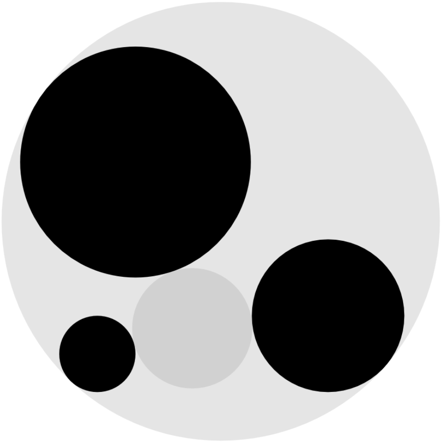
$$\begin{cases} (x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(r\pm r_1)^2 &= 0\\ (x-x_2)^2+(y-y_2)^2-(r\pm r_2)^2 &= 0\\ (x-x_3)^2+(y-y_3)^2-(r\pm r_3)^2 &= 0 \end{cases}$$

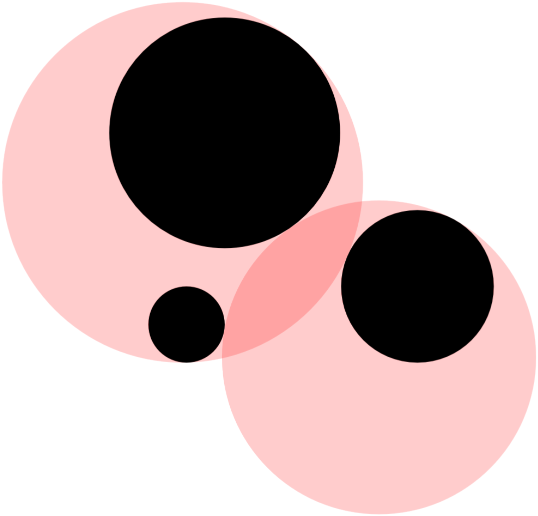
Des cercles. . .

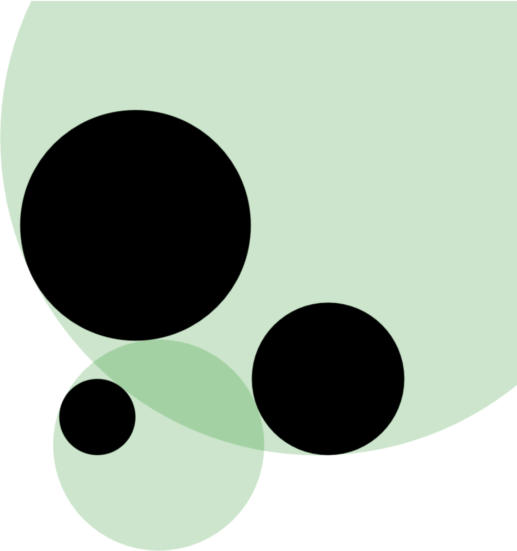
Théorème

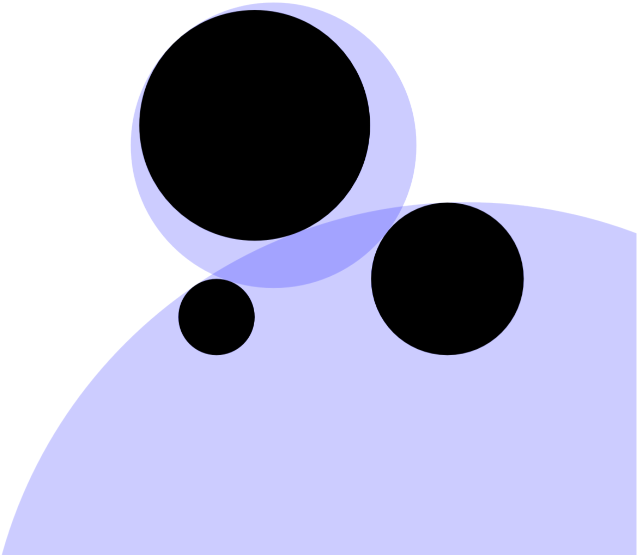
Il existe au plus huit cercles tangents à trois cercles donnés.

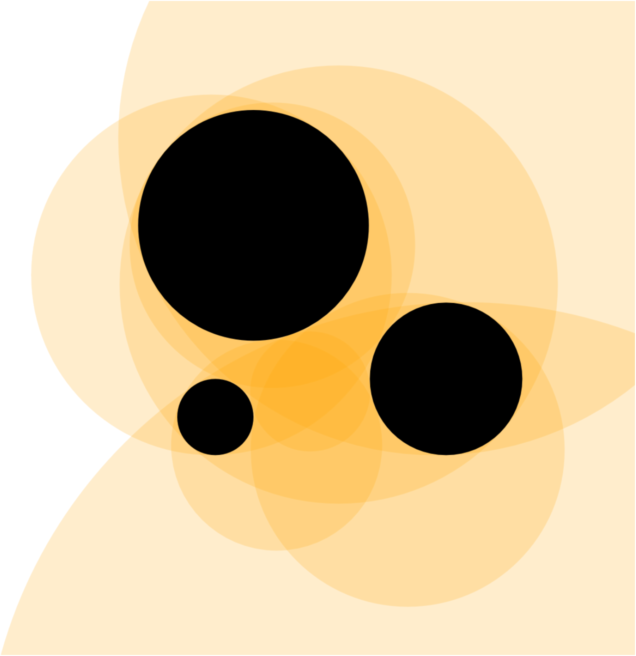












Des cercles. . . aux coniques

Théorème (Chasles - 1864)

Il y a au plus 3 264 coniques tangentes à 5 coniques données.

En 1997, trois mathématiciens, Ronga, Tognoli et Vust, ont trouvé un exemple de 5 coniques réelles bien choisies, telles que l'intégralité des 3 264 coniques de Chasles existent bel et bien : elles sont *réelles*.

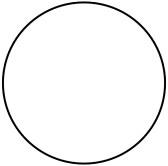
Jean-Yves Welschinger, chercheur CNRS à Lyon, a récemment montré un très joli théorème. On considère 5 ellipses dans le plan dont les intérieurs ne se rencontrent pas. Alors, parmi les 3 264 coniques de Chasles, au moins 32 existent réellement !

Des cercles. . . encore

Des cercles. . . en construction

Question

- Comment construire aux instruments le centre d'un cercle ?
- Peut-on construire au compas seul le centre d'un cercle ?



Longueurs

Aires

Volumes

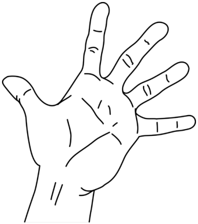
Volumes

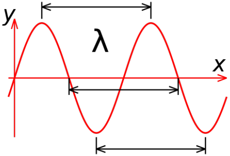
Volumes

Mesures

Question

- Comment mesurer les longueurs, les aires, les volumes ?
- Quelles ont été les évolutions des unités de mesure à travers le temps ?



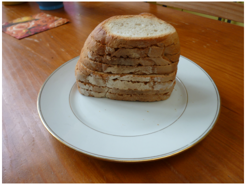


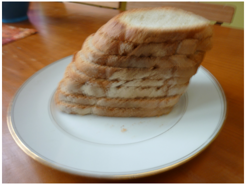
Principe de Cavalieri ou...

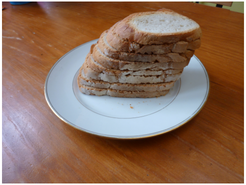
Principe

Deux solides posés sur un même plan, dans le même demi-espace, ont le même volume si toutes les sections par un plan parallèle au plan de base ont la même aire.

Du pain sur la planche. . .







Équivalence de volumes - Condition non nécessaire

$$l \times p \times h = \pi \times \frac{2}{3} \times 2 \qquad \frac{4}{3}\pi 1^3$$

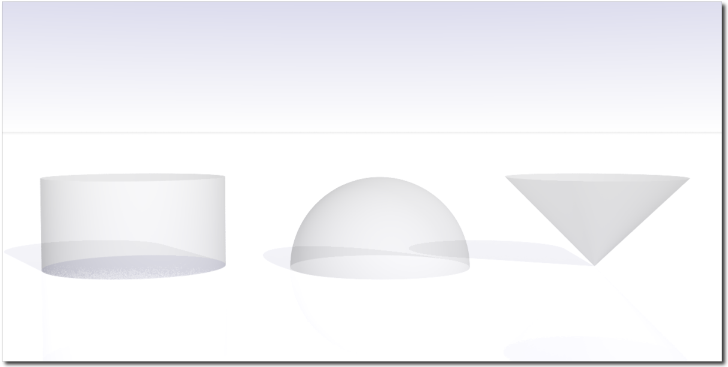
Principe de Cavalieri

Principe

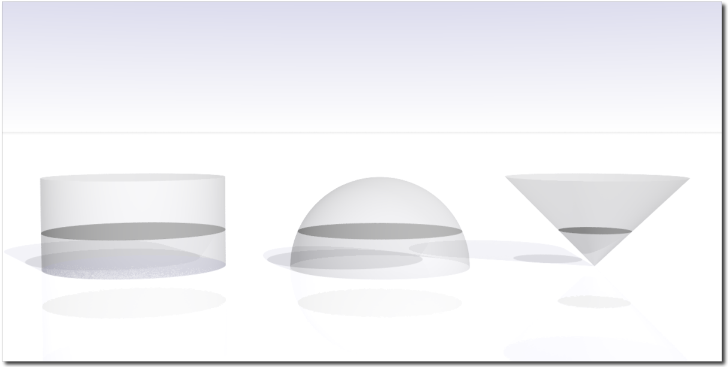
Étant donnés trois solides A, B et C posés sur un même plan, dans le même demi-espace, tels que tout plan parallèle au plan de base coupe les trois solides en trois sections S_A, S_B et S_C telles que : $\mathcal{A}(S_A) = \mathcal{A}(S_B) + \mathcal{A}(S_C)$, alors

$$\mathcal{V}(S_A) = \mathcal{V}(S_B) + \mathcal{V}(S_C).$$

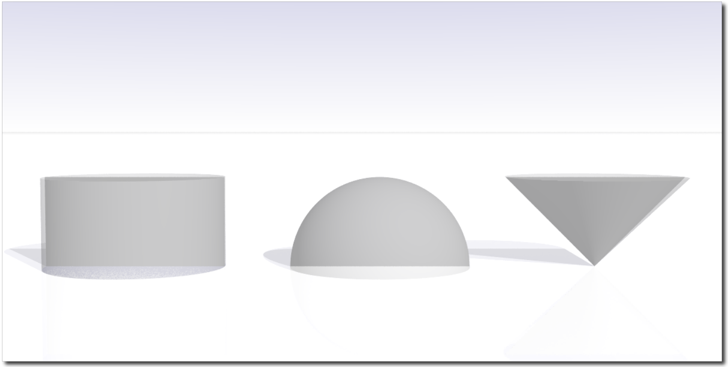
Équivalence de volumes



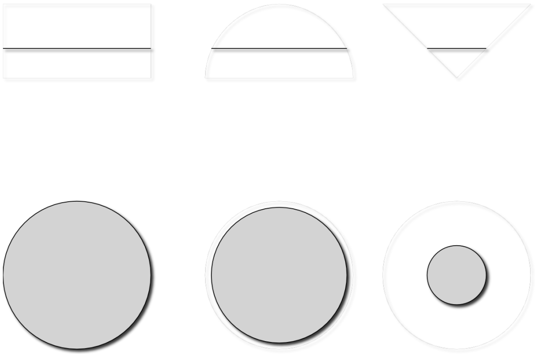
Équivalence de volumes



Équivalence de volumes



Équivalence de volumes



πR^2 $\qquad$ $\pi(\sqrt{R^2 - h^2})^2$ $\qquad$ πh^2

Que voyez-vous ?

Et maintenant. . .

Empilements. . .

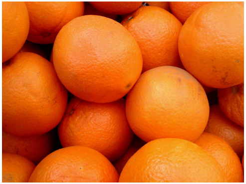
Empilements. . .

Empilements. . .

Empilements

Question

- Quelle est la façon optimale d'empiler des volumes tels que parallélépipèdes rectangles, cylindres, sphères ?

Quelques réponses naturelles. . .

Problème de Kepler

En 1600, Sir Walter Raleigh demanda au mathématicien Thomas Harriot une formule pour calculer le nombre de boulets de canon dans un tas. Harriot se posa naturellement le problème de la disposition des boulets.

En 1606, Johannes Kepler s'empara du problème, il y voyait en effet un lien avec celui de la formation des cristaux de neige, des alvéoles des ruches et des pépins de grenade.

Question

- Comment déterminer la configuration des sphères de même rayon ayant la plus grande densité ?

Des cercles. . . concentriques

Des cercles. . . concentriques, tangents

Des cercles. . . concentriques, tangents, bi-tangents

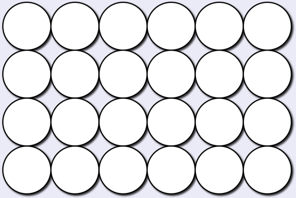
Des cercles. . . concentriques, tangents, bi-tangents, tri-tangents

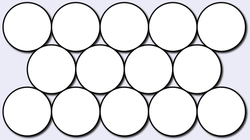
Des cercles. . . concentriques, tangents, bi-tangents

Deux *empilements* dans le plan

Question

- Quelles sont les densités des empilements suivants ?

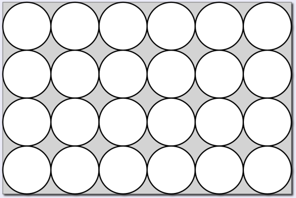


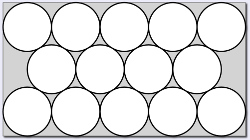


Deux *empilements* dans le plan

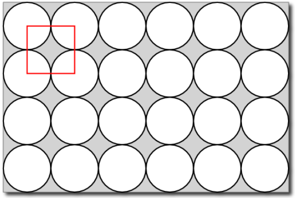
Question

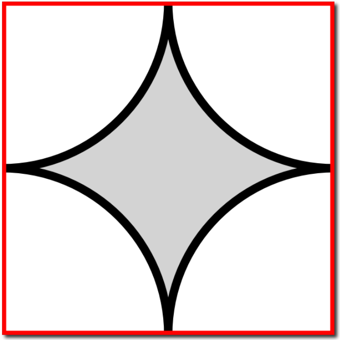
- Quelles sont les densités des empilements suivants ?





Pavage carré

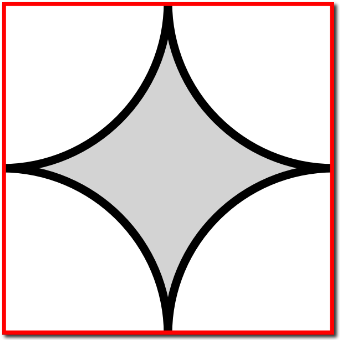




$$\text{Densité} = \frac{\text{Aire de la surface occupée par les disques}}{\text{Aire de la maille carrée}} = \frac{\mathcal{A}_D}{\mathcal{A}_M}$$

Pavage carré

$$\text{Densité} = \frac{\mathcal{A}_D}{\mathcal{A}_M}$$

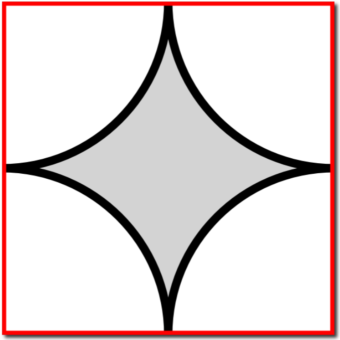


$$\mathcal{A}_D = 4\frac{\pi r^2}{4}$$

$$\mathcal{A}_M = (2r)^2$$

Pavage carré

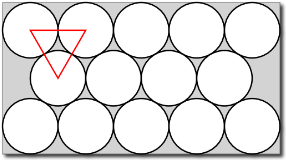
$$\text{Densité} = \frac{\mathcal{A}_D}{\mathcal{A}_M}$$

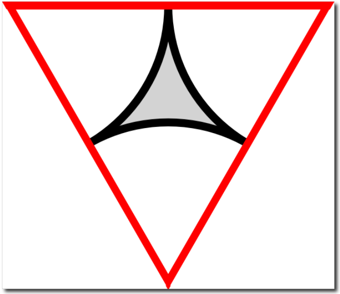


$$\begin{aligned} \mathcal{A}_D &= 4\frac{\pi r^2}{4} \\ \mathcal{A}_M &= (2r)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Densité} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

Pavage triangulaire

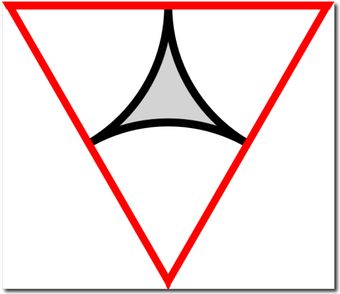




$$\text{Densité} = \frac{\text{Aire de la surface occupée par les disques}}{\text{Aire de la maille carrée}} = \frac{\mathcal{A}_D}{\mathcal{A}_M}$$

Pavage triangulaire

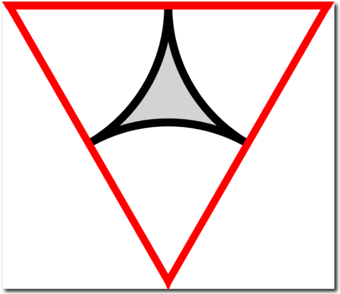
$$\text{Densité} = \frac{\mathcal{A}_D}{\mathcal{A}_M}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{A}_D &= 3\frac{\pi r^2}{6} \\ \mathcal{A}_M &= \frac{1}{2} 2r \frac{\sqrt{3}}{2} 2r \end{aligned}$$

Pavage triangulaire

$$\text{Densité} = \frac{\mathcal{A}_D}{\mathcal{A}_M}$$



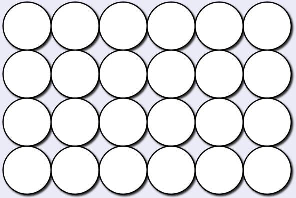
$$\begin{aligned}\mathcal{A}_D &= 3\frac{\pi r^2}{6} \\ \mathcal{A}_M &= \frac{1}{2}2r\frac{\sqrt{3}}{2}2r\end{aligned}$$

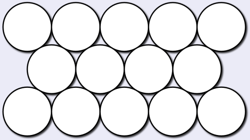
$$\text{Densité} = \frac{\frac{\pi r^2}{2}}{\sqrt{3}r^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Deux *empilements* dans le plan

Réponse

- Quelles sont les densités des empilements suivants ?



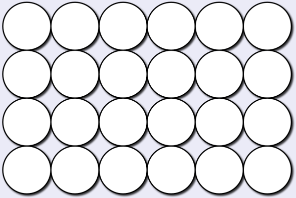


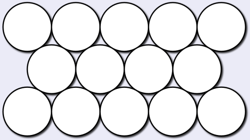
$$\frac{\pi}{4} \qquad\qquad \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Deux *empilements* dans le plan

Réponse

- Quelles sont les densités des empilements suivants ?





$$\frac{\pi}{4}$$

0,78539...

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

0,90689...

Exemple

Solutions au problème de Kepler

Dans le plan

- En 1831, Gauss a démontré que la configuration hexagonale est la meilleure parmi toutes celles portées par un réseau régulier du plan.
- En 1982, Axel Thue a démontré que la configuration hexagonale est la meilleure en absolu.

Dans l'espace

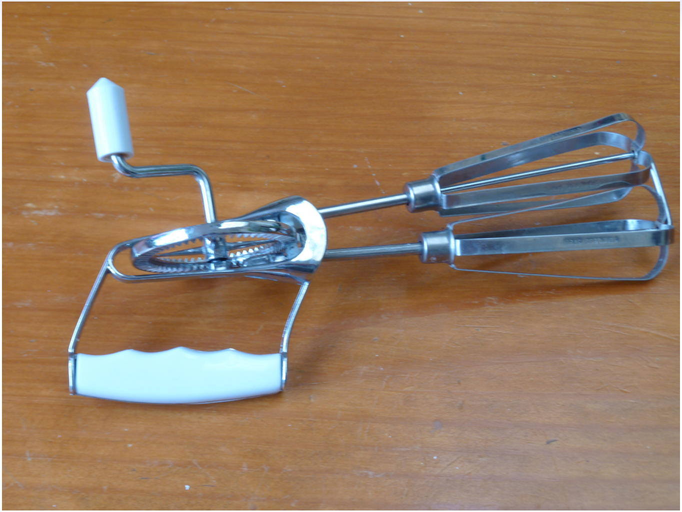
- Kepler a déterminé les densités de la configuration carrée alignée, de la configuration hexagonale alignée et de la configuration décalée : 0,524, 0,605 et 0,740.
- Gauss a démontré que la configuration décalée est la meilleure parmi toutes celles portées par un réseau régulier de l'espace.
- En 1998, Thomas Hales a démontré que la configuration décalée est la meilleure en absolu.

Exemples



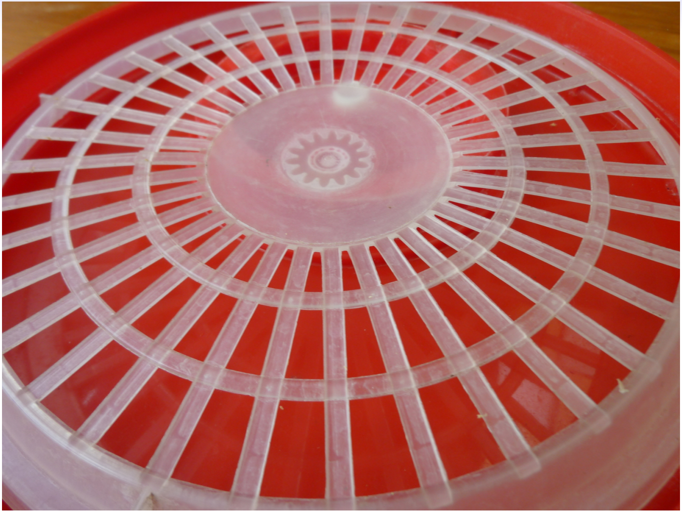

Engrenages. . .

Engrenages. . .



Engrenages. . .

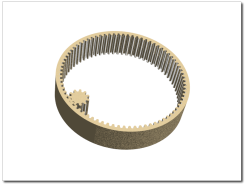
Engrenages...



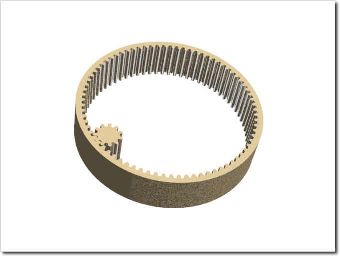
Engrenages

Question

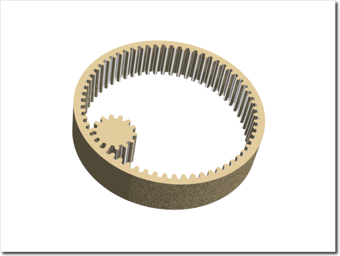
- Comment décire et étudier les mouvements engendrés par les engrenages ?
- Seriez-vous prêts à faire un petit tour en panier à salade ?



Engrenages. . .



11/7



14/62

Courbe qui roule. . .

Définition

Soit une courbe $\mathcal{C}$ qui se déplace de façon à rester tangente à une courbe $\mathcal{B}$.
On dit que la courbe $\mathcal{C}$ *roule sans glisser* sur la courbe $\mathcal{B}$ si à un point A fixé sur $\mathcal{C}$ correspond un point O fixé sur $\mathcal{B}$ de manière que les valeurs algébriques des arcs AP et OP restent égales quand on suppose les courbes orientées de façon que sur les deux courbes le sens positif soit le même au point P où elles sont tangentes.

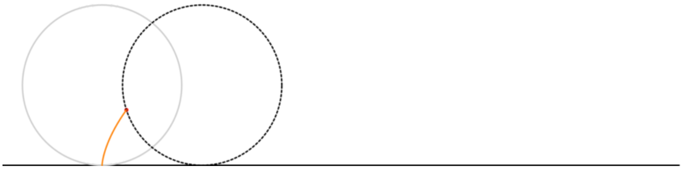
Cycloïde

Cycloïde

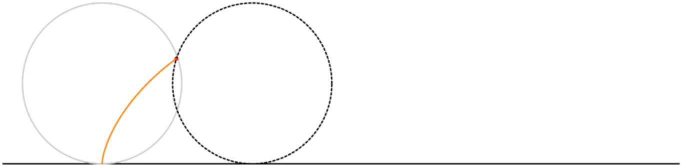
Cycloïde

Cycloïde

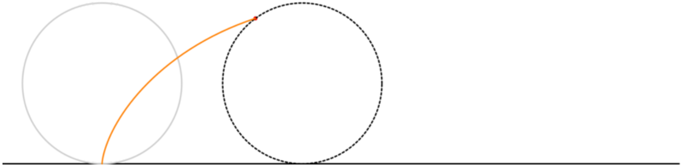
Cycloïde



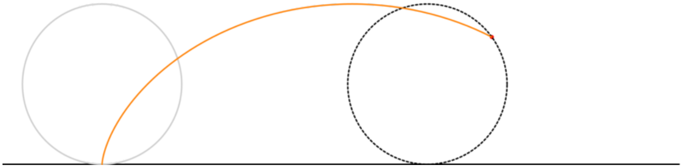
Cycloïde



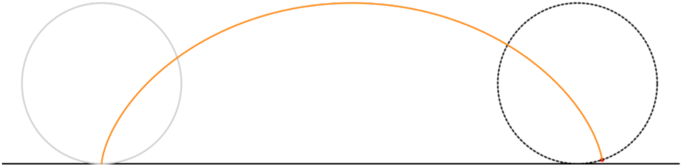
Cycloïde



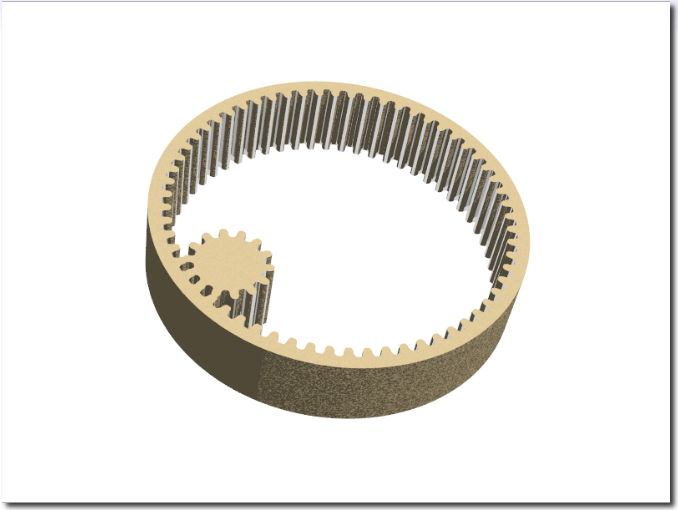
Cycloïde



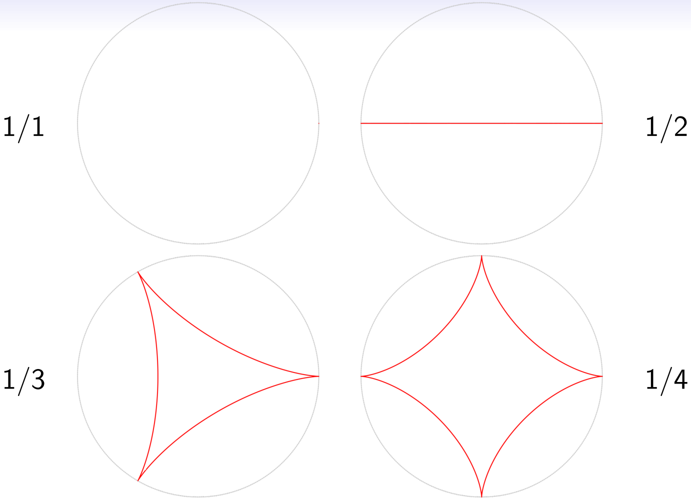
Cycloïde



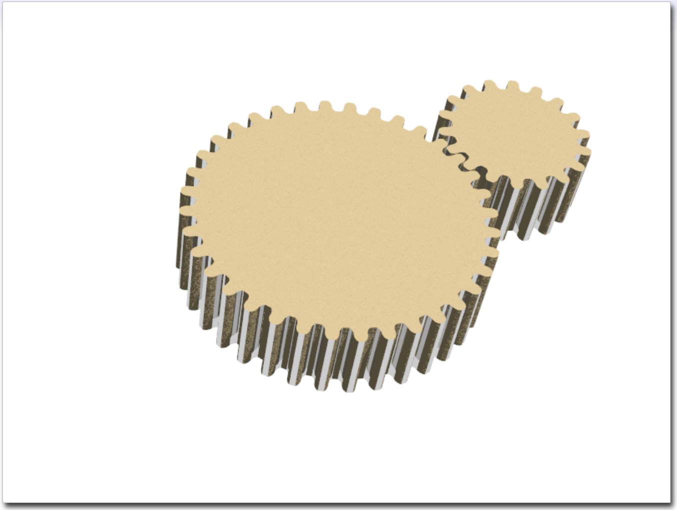
Engrenages. . .



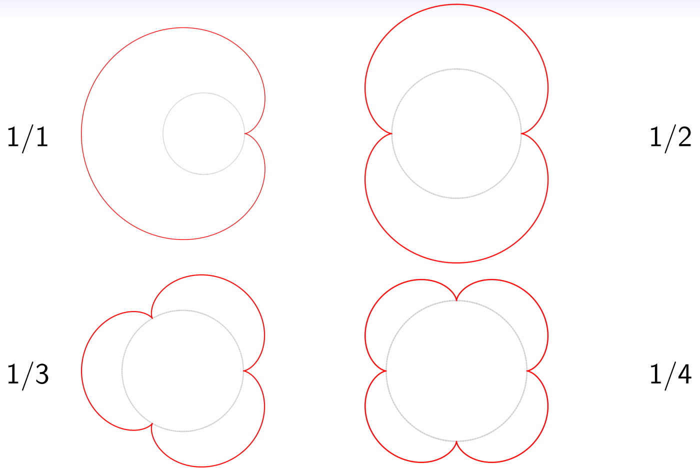
Hypocycloïde



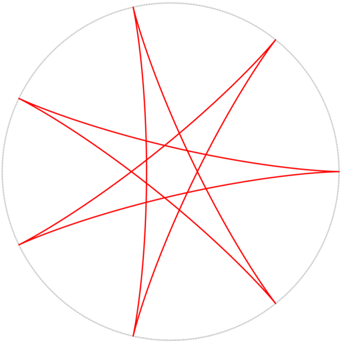
Engrenages. . .

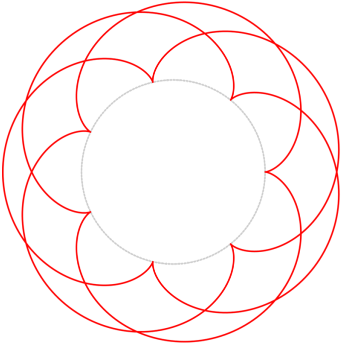


Epicycloïde



Hypo-épi-cycloïde





$3/7$

Chutes. . .

Chutes...

Chutes. . .

Chutes

Question

- Comment expliquer ces différentes sections du filet d'eau ?

Chutes. . .

D'un robinet à section cylindrique, de l'eau s'écoule **à débit constant**.
On observe que la largeur du jet d'eau formé n'est pas constante mais qu'elle va en s'amincissant.
Pourquoi ?
Quels sont les paramètres qui entrent en jeu ?
Le but est d'étudier la forme de ce jet. Au Seicento (XVIIème siècle), un disciple de Galilée, Benedetto Castelli, avait remarqué que dans l'étude de ce problème la section n'était pas le seul paramètre à prendre en compte.
Pour mieux saisir ce problème prenons un autre problème.

Chutes. . .

Étudions les déplacements de personnes dans une série de couloirs. Dans le premier couloir, très large, passent par exemple cinquante personnes toutes les minutes.
Si le deuxième couloir est deux fois moins large, combien de personnes pourront le parcourir par minute ?
Vingt-cinq ?
Cinquante ? Pourquoi pas ?
Mais dans quelles conditions ? Lorsque ces personnes marchent plus vite, c'est-à-dire doublent leur vitesse... Il faut donc ne pas seulement tenir compte de la largeur du couloir, mais aussi de la vitesse.
C'est la découverte de Benedetto Castelli.

Chutes. . .

Maintenant, si un troisième couloir est large seulement un cinquième du premier couloir que va-t-il se passer ?
On soupçonne que la vitesse de circulation dans ce couloir doit être cinq fois plus importante que celle dans la premier couloir.
En général, si la largeur d'un couloir est divisée par un certain nombre, et qu'en même temps la vitesse est multipliée par ce même nombre, le flux des personnes, défini comme le produit de la largeur du couloir par la vitesse, reste toujours constant. Dans ce cas on dit que les grandeurs sont inversement proportionnelles : si nous souhaitons que le flot des personnes soit constant, la vitesse doit être inversement proportionnelle à la largeur du couloir.

Chutes. . .

C'est ce qui se passe pour l'eau qui sort du robinet. Puisque le flot est obligatoirement constant (toute l'eau qui sort d'un robinet en une seconde doit passer par n'importe quelle section en une seconde), la section du jet sera inversement proportionnelle à la vitesse de l'eau.

D'autre part, l'eau en tombant accélère de plus en plus et par conséquent la section du jet diminue.

La question est donc : peut on calculer le rayon de cette section ?

Oui. Comment ?

Tout d'abord, il faut fixer le point de départ. On va mesurer le temps et la hauteur de la chute à partir du moment où l'eau sort du robinet. On va dire alors qu'au temps 0 la hauteur de la chute d'eau est 0 avec une vitesse v_0. Cette vitesse est fonction de l'ouverture du robinet. Lorsque le robinet est fermé la vitesse est nulle.

Chutes...

Maintenant on doit se poser la question : quelle est la vitesse d'un corps qui tombe s'il est lancé verticalement vers le bas avec une vitesse v_0 ?
L'eau tombe avec un mouvement accéléré avec une accélération g appelée accélération de gravité.
L'eau étant sortie avec une vitesse initiale v_0, elle aura après être tombée d'une hauteur h une vitesse v donnée par :

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

Voici l'explication de la formule précédente. Un corps qui tombe augmente sa vitesse proportionnellement au temps de chute, avec une accélération de gravité g. Par conséquent, si le corps est parti avec une vitesse v_0, après une seconde sa vitesse sera de $v_0 + g$, après deux secondes de $v_0 + 2g$, après trois secondes $v_0 + 3g$,... après t secondes une vitesse de $v_0 + gt$, c'est-à-dire $v = v_0 + gt$.

Chutes. . .

Question : quel est la distance parcourue au même temps t ?
Rappelons que la distance est le produit de la vitesse par le temps donc il est égal à $vt = v_0 t + gt^2$. Or, la vitesse v c'est-à-dire $v = v_0 + gt$ est celle au temps t.
Pour des valeurs inférieures du temps, la vitesse était inférieure et par conséquent la distance parcourue était inférieure. Pour la calculer correctement il faut rappeler que la distance est l'intégrale de la vitesse, et donc que la distance h parcourue en un temps t est donnée en intégrant l'expression de la vitesse $v = v_0 + gt$, d'où

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

Chutes. . .

Pour calculer la distance parcourue par l'eau, on va suivre les idées de Galilée et ceci avant l'invention du calcul infinitésimal et des intégrales en particulier.
Pour calculer distance parcourue après t secondes, il ne faut pas prendre la vitesse au temps t mais la vitesse moyenne pendant toute la durée de la chute.
Si nous représentons par une ligne verticale AB le temps au début de la chute, et pour chaque instant (c'est-à-dire tout point du segment AB) nous représentons avec un segment horizontal la vitesse de l'eau à l'instant donné, on obtient une figure en forme de trapèze.
Au début la vitesse v_0 est donnée par le segment AP ; après t secondes (instant qui correspond au point B), l'eau va tomber avec une vitesse $v_0 + gt$ donnée par le segment BQ. Entre le deux points A et B, par exemple au point C, la vitesse est donnée par le segment CR puisque, comme nous l'avons dit avant, la vitesse augment proportionnellement au temps.

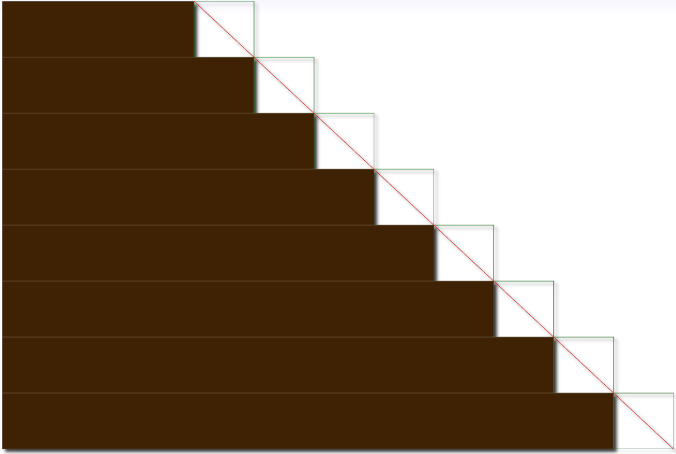
Chutes. . .

On partage alors le segment AB en plusieurs parties égales $Ac, cd, de, \ldots$ Si nous supposons que sur le segment de la vitesse reste constante et égale à la vitesse en d, la distance parcourue pendant le temps de sera donné par la vitesse en d multipliée par le temps de et par conséquent sera donné par l'aire du rectangle hachuré de base de.
Ceci serait vrai si la vitesse pendant de reste constante. Or, puisque la vitesse augmente dans l'intervalle de temps de, l'espace réellement parcouru sera supérieur.

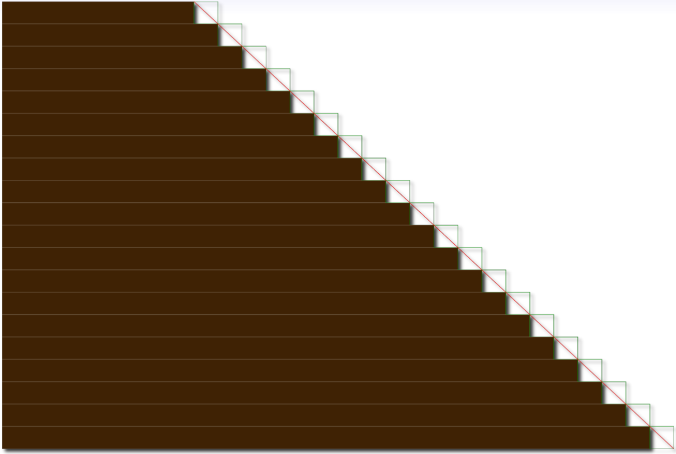
Chutes...

Les mêmes considérations peuvent être faites sur les petits intervalles $Ac, cd, etc, \ldots$ et donc la distance parcourue dans l'intervalle AB sera plus grande que l'aire de la figure en escalier hachurée et interne au trapèze $ABQP$.
Si alors nous supposons la vitesse égale à celle de la deuxième borne (dans l'exemple précédent la borne e à la place de la borne d), la distance parcourue serait égale à l'aire de la figure en escalier extérieure au trapèze. Puisque la vrai vitesse est inférieure, la distance parcourue sera inférieure aussi.

Chutes. . .



Chutes. . .



Chutes. . .

En conclusion, la distance parcourue pendant la chute sera comprise entre la figure en escalier intérieure au trapèze et celle de la figure extérieure.
Ces deux figures en escalier s'approchent de plus en plus à l'aire du trapèze au fur et à mesure que l'on multiplie le partie entre A et B.
Le raisonnement est presque rigoureux mais satisfaisant compte tenu de l'époque de Galilée.
L'aire du trapèze est donc donnée par le demi-produit des deux bases par la hauteur. Les bases mesurent respectivement v_0 et $v_0 + gt$; la hauteur mesure t et par conséquent l'aire est égale à

$$v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 .$$

Chutes...

Pour trouver la formule $v^2 = v_0^2 + 2gh$ rappelons que $v = v_0 + gt$ et que $h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$, d'où $2gh = 2gv_0 t + g^2 t^2$. La première égalité donne $gt = v - v_0$ d'où, grâce à la deuxième formule,

$$2gh = 2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2 = (v - v_0)(2v_0 + v - v_0)$$

$$= (v - v_0)(v - v_0) = v^2 - v_0^2$$

d'où

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

Nous avons ainsi calculé la vitesse après une chute de hauteur h. Maintenant, calculons la forme du jet.

Chutes...

La section du jet d'eau est un disque. Si on note r son rayon, r_0 le rayon du robinet (par exemple 1 cm) à hauteur 0, l'aire de la section est πr_0^2. Puisque le produit de l'aire par la section du cercle par la vitesse reste constante, on doit avoir

$$\pi r^2 v = \pi r_0^2 v_0.$$

Par conséquent

$$r^4 v^2 = r_0^4 v_0^2$$

Or $v^2 = v_0^2 + 2gh$; en remplaçant dans la formule précédente on obtient :

$$r^4(v_0^2 + 2gh) = r_0^4 v_0^2,$$

d'où encore

$$r^4 = \frac{r_0^4 v_0^2}{v_0^2 + 2gh}.$$

Chutes. . .

Finalement le rayon du disque (du jet d'eau) en fonction de la hauteur h est donné par

$$r = r_0 \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gh}}$$

ou bien

$$r = \frac{r_0}{\sqrt[4]{1 + Ah}}$$

car nous avons posé A à la place de $\frac{2g}{v_0^2}$.

Rappelons maintenant que $g = 9,81 m/sec^2$ ou bien $g = 981 cm/sec^2$.

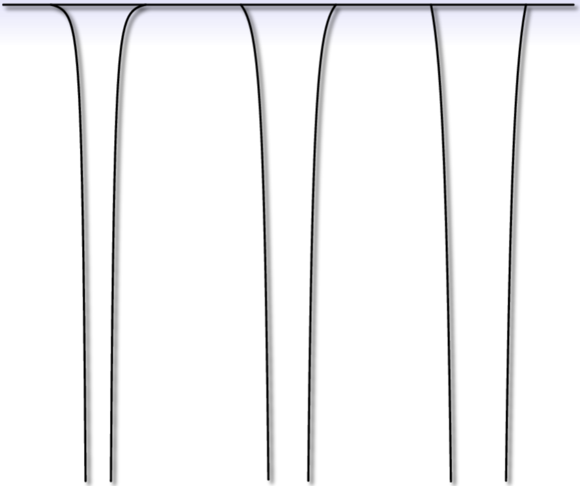
Chutes...

$$r = \frac{r_0}{\sqrt[4]{1 + Ah}}$$

Si nous ouvrons le robinet (un tout petit peu) on peut supposer la vitesse initiale de l'eau égale à $v_0 = 5cm/sec$; si le robinet est bien ouvert on peut supposer la vitesse de l'eau égale à $v_0 = 10cm/sec$. Si le robinet est grand ouvert on peut supposer la vitesse de l'eau égale à $v_0 = 20cm/sec$.

Dans le premier cas la valeur de A est égale à $\frac{2\times 981}{5^2} = 78,48$; dans le deuxième cas $A = \frac{2\times 981}{10^2} = 19,62$. Dans le troisième cas $A = \frac{2\times 981}{10^2} = 4,9$. Avec ces valeurs nous pouvons calculer les formes du jet !

Chutes. . .



$v_0 = 1\,cm/s$ $\quad v_0 = 2,5\,cm/s$ $\quad v_0 = 5\,cm/s$

Des maths un peu partout...

Courbes de diamètre constant

Des maths un peu partout...

Pavages et frises

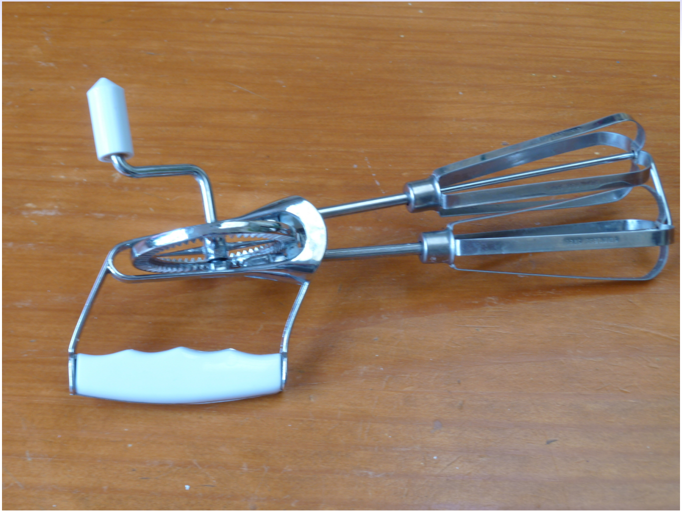
Des maths un peu partout...

Histoire des mesures des grandeurs

Des maths un peu partout. . .

Bulles de savon et surfaces minimales

Des maths un peu partout. . .



Des maths un peu partout. . .

Partages