Expérience n°7 –GYROSCOPE

Domaine: Mécanique

Lien avec le cours de Physique Générale:
Cette expérience est reliée aux chapitres suivants du cours de Physique Générale:

- Physique I, Chapitre 3: Dynamique : Newton, force et action
- Physique I, Chapitre 7: Mouvement harmonique et résonance
- Physique II, Chapitre 5: Mouvement de rotation

Objectif général de l'expérience

Un gyroscope est un dispositif soumis à un mouvement de rotation obéissant au **théorème du moment cinétique**. L'objectif principal de cette expérience est de **déterminer le moment d'inertie d'un gyroscope** par deux méthodes différentes. La première s'appuie sur l'étude du mouvement pendulaire d'une masse fixée sur le disque du gyroscope. La seconde est basée sur l'étude du **mouvement de précession** induit par un moment de force extérieur agissant sur le gyroscope, en fonction de la vitesse angulaire du disque en rotation et du moment de force extérieur.

1 Introduction

1.1) Le Gyroscope

On appelle gyroscope un **corps solide qui n'a qu'un seul point fixe** (Figure 1). Son mouvement est une **rotation** autour de l'**axe instantané** de rotation qui peut changer de direction à tout instant par rapport au corps. Le mouvement général d'un gyroscope est compliqué et très difficile à traiter mathématiquement. Afin de simplifier le problème, nous allons considérer dans cette expérience le cas le plus simple du **gyroscope symétrique à rotation rapide** tel qu'on le rencontre souvent en pratique (volant, boussole gyroscopique, stabilisateur, etc…).

Figure 1: Schéma de principe d'un gyroscope (Animation: http://fr.wikipedia.org/wiki/Gyroscope).

Ce dispositif permet de démontrer la **loi de conservation du moment cinétique** (appelé aussi moment angulaire ou moment d'impulsion). Cette loi fondamentale de la mécanique implique qu'en l'absence de moment de force extérieure (ou couple) appliqué à un solide en rotation, celui-ci conserve son axe de rotation invariable. Lorsqu'un couple est appliqué au dispositif, il provoque une **précession** ou une **nutation** du solide en rotation.

L'essentiel du dispositif est une roue (ou tout objet correctement équilibré) tournant sur un axe qui, une fois lancée, tend à résister aux changements de son orientation. Une façon simple d'expérimenter cet effet consiste à tenir à bout de bras une roue de vélo par les écrous du moyeu et de la faire tourner rapidement par une autre personne. Lorsque l'on tente de pencher sur le côté la roue en rotation, on ressent une résistance à ce mouvement. C'est la conservation du moment de rotation qui tend à s'opposer à ce mouvement.

1.2) Rappel de mécanique: mouvement de rotation et moment cinétique

Pour une particule simple ou pour le centre de masse d'un ensemble de particules, le **vecteur moment cinétique** $\vec{\boldsymbol{L}}$ correspond au moment de la quantité de mouvement, c'est-à-dire au produit vectoriel du vecteur position $\vec{\boldsymbol{r}}$ et de la quantité de mouvement $\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}}$:

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times m\vec{\boldsymbol{v}} \ . \qquad \text{(Eq. 1)}$$

Pour une rotation dans l'espace à 3 dimensions, le **théorème du moment cinétique** (Eq. 2) est l'analogue de la $2^{ème}$ loi de Newton s'appliquant aux mouvements de translation. Le théorème du moment cinétique établit que le moment $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$ des forces extérieures $\vec{\boldsymbol{F}}$ s'appliquant sur un corps en rotation est égal à la variation instantanée (dérivée par rapport au temps) du vecteur moment cinétique:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} \ . \qquad \text{(Eq. 2)}$$

La relation (Eq. 2) est une équation vectorielle qui donne des indications sur la grandeur, la direction et le sens des variations du moment cinétique $\vec{\boldsymbol{L}}$. Pour un système composé de plusieurs particules, c'est le moment cinétique total qui est pris en compte.

Le théorème du moment cinétique indique qu'en absence de moment de force externe ($\tau = 0$), le moment cinétique total du système est une constante. C'est la **loi de conservation du moment cinétique**: si aucun moment de force ne s'exerce sur un système donné, son moment cinétique ne peut pas se modifier. Le moment cinétique (resp. le moment de forces) est l'équivalent pour la rotation de l'impulsion (resp. l'accélération) pour les mouvements de translation.

Dans le cas général d'un solide en rotation autour d'un axe quelconque, il faut remarquer que le moment cinétique $\vec{\boldsymbol{L}}$ et l'axe instantané de rotation $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ne sont pas systématiquement parallèles. Mais si l'axe de rotation coïncide avec un axe de symétrie du solide, on peut écrire:

$$\vec{\boldsymbol{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}} \ , \qquad \text{(Eq. 3)}$$

où I est le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation et $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ le vecteur de vitesse angulaire. Le **moment d'inertie** décrit la répartition de la masse d'un solide autour de son centre de masse:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \ , \qquad \text{(Eq. 4)}$$

Le moment cinétique d'un corps en rotation soumis à aucun moment de force extérieur est constant. Si le moment d'inertie I du corps est modifié, la vitesse de rotation ω sera changée selon la relation (Eq. 3). C'est le cas de la patineuse qui tourne de plus en plus vite en resserrant les bras contre son corps afin de réduire son moment d'inertie (Figure 2).

Figure 2: Exemple de conservation du moment cinétique. Pirouette d'une patineuse qui augmente sa vitesse de rotation en resserrant ses bras contre son corps pour réduire son moment d'inertie.

1.3) Mouvements de précession et de nutation

Le théorème du moment cinétique peut être illustré par le cas d'une une toupie pointue posée sur une surface plane qui tourne rapidement autour de l'axe instantané de rotation supposé identique à l'axe de symétrie de la toupie (Figure 3). Au temps *t*, le moment cinétique a une valeur $\vec{L}$. La toupie étant penchée, son poids $\vec{P}$ agissant au centre de gravité G produit un moment $\vec{\tau}$ par rapport à la pointe O de la toupie. Le théorème du moment cinétique (Eq. 2) peut se réécrire comme:

$$d\vec{L} = \vec{\tau} \cdot dt \qquad \text{(Eq. 5)}$$

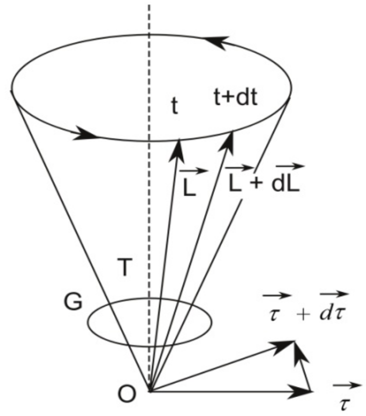

Figure 3: Schéma illustrant le principe de la précession pour une toupie.

L'accroissement du moment cinétique $d\vec{L}$ est parallèle au moment de force $\vec{\tau}$. Au temps *t+dt*, le moment cinétique $\vec{L}$, l'axe de la toupie et le moment $\vec{\tau}$ ont de nouvelles directions données par $\vec{L} + d\vec{L}$ et $\vec{\tau} + d\vec{\tau}$. Si la force $\vec{P}$ agit constamment, l'axe de la toupie tourne autour de la verticale passant par O et effectue un mouvement appelé **précession**.

Si le moment cinétique n'est pas confondu avec l'axe de symétrie du corps (appelé aussi axe de rotation rapide), la toupie effectue un troisième mouvement de rotation qui s'ajoute à la précession: c'est **la nutation**. On peut mieux la mettre en évidence expérimentalement en supprimant le moment de force $\vec{\tau}$: c'est le cas du **gyroscope supporté en son centre de gravité**:

$$\vec{\tau} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \;. \qquad \text{(Eq. 6)}$$

Le moment cinétique $\vec{L}$ est constant et l'axe de rotation rapide, s'il n'est pas confondu avec $\vec{L}$, tourne autour du moment cinétique $\vec{L}$ qui est fixe dans l'espace. L'axe de rotation rapide décrit un cône (cône de nutation). Ce mouvement est facile à observer: il suffit de donner un choc à un gyroscope rapide pour faire en sorte que le moment cinétique ne coïncide plus avec l'axe du corps qui décrit alors un cône de nutation.

2 Principe général de l'expérience

Le but de cette expérience est de mesurer le moment d'inertie *I* d'un gyroscope de deux manières différentes, d'une part par l'étude du **mouvement pendulaire** d'une masse fixée sur le disque du gyroscope (§2.1), et d'autre part par l'intermédiaire du **mouvement de précession** du gyroscope (§2.2). Le gyroscope utilisé est schématisé sur la Figure 5.

2.1) Méthode du pendule

On fixe une masse *m* sur le disque du gyroscope comme indiqué sur la Figure 4 et on utilise le système ainsi formé comme un pendule physique. La période *T* du mouvement de ce pendule s'exprime à partir du moment d'inertie total du système (disque + masse):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I' + md^2}{mgd}} \;, \qquad \text{(Eq. 7)}$$

où les différents paramètres sont définis comme suit :

T = période du pendule physique (disque + masse) [s]
I = moment d'inertie du disque seul [kg·.m^2]
$I' = mr^2/2$ **:** moment d'inertie de *m* par rapport à l'axe passant par son centre de gravité [kg·m^2]
m = masse additionnelle [kg]
d = distance entre le centre de gravité de la masse et l'axe de rotation [m]
g = 9.81 m·s^{-2} : accélération terrestre
r = rayon de la masse additionnelle [m]

On obtient le moment d'inertie du disque à partir de l'expression (Eq. 7):

$$\boxed{I = m\left[\frac{T^2 gd}{4\pi^2} - d^2 - \frac{r^2}{2}\right]} . \qquad \text{(Eq. 8)}$$

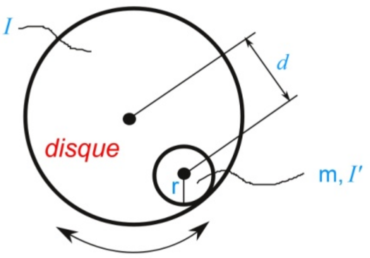

Figure 4: Schéma de principe du montage utilisé pour la mesure du moment d'inertie du gyroscope par un pendule physique.

2.2) Etude du mouvement de précession

On considère dans cette expérience un **gyroscope symétrique pesant à rotation rapide** schématisé sur la Figure 5. Un disque D est fixé à un moteur ME supporté par une barre B de telle façon que l'axe du gyroscope coïncide avec celui de la barre. Cette barre est fixée en son centre O à un palier qui permet une rotation aussi bien autour d'un axe vertical qu'horizontal, soit un mouvement quelconque autour de O. Un contrepoids C permet d'équilibrer le système.

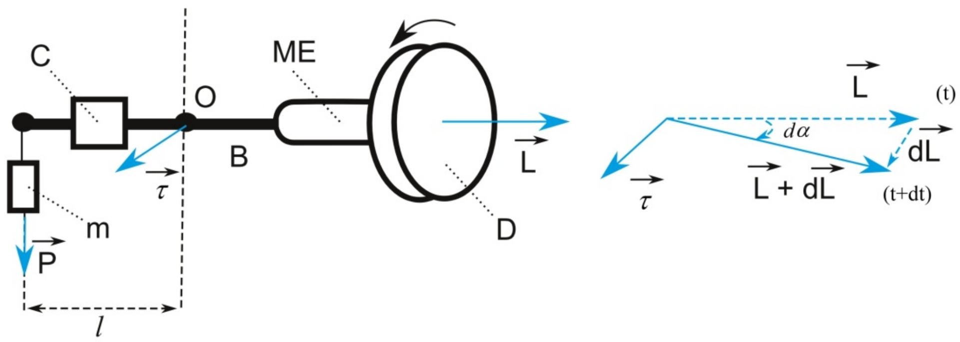

Figure 5: (a) Schéma de principe du gyroscope. (b) Le moment cinétique $\vec{L}$ du disque est modifié par l'application sur le bras du gyroscope d'une force transverse $\vec{P} = m\vec{g}$. Le moment de force résultant qui est perpendiculaire au moment cinétique est à l'origine du phénomène de précession.

Le gyroscope formé par le disque tourne autour de son axe avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Par symétrie, son moment cinétique est dirigé dans la direction de l'axe du corps en rotation (parallèle à $\vec{\omega}$). Tant que le gyroscope est bien équilibré, il n'est soumis à aucun moment de force extérieur ($\vec{\tau} = 0$) et son moment cinétique reste constant selon l'expression (Eq. 5).

Lorsqu'un gyroscope est soumis à un moment dû à son propre poids (déséquilibre du point d'appui) son mouvement est plus complexe et présente une précession caractéristique. Ce mouvement est relativement simple uniquement si l'axe de rotation coïncide avec l'axe de symétrie du corps et si la rotation est rapide (ce qui est le cas pour l'expérience qui suit). Pour mettre en évidence un tel mouvement, on suspend une masse *m* à l'extrémité libre de la barre. Il en résulte un moment de force $\vec{\tau}$ par rapport au point fixe O. Cela provoque une variation du moment cinétique $d\vec{L} = \vec{\tau} \cdot dt$ et le gyroscope effectue une précession dont la vitesse angulaire Ω (vitesse de précession) vaut:

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} \ , \qquad \text{(Eq. 9)}$$

où $d\alpha$ est l'angle, dans le plan horizontal, dont a tourné l'axe du gyroscope pendant l'intervalle de temps *dt.* De la Figure 5(b), on obtient:

$$d\alpha = \frac{dL}{L} \ . \qquad \text{(Eq. 10)}$$

En tenant compte que $dL = \tau dt$ (Eq. 5), on obtient que $\Omega = \tau / L$. En remplaçant les moments cinétique et d'inertie par leur expression ($\tau = mgl$ et $L = I\omega$), on obtient pour la vitesse angulaire de précession:

$$\boxed{\Omega = \frac{gl}{I}\frac{m}{\omega}} \ . \qquad \text{(Eq. 11)}$$

La précession est donc d'autant plus rapide que le moment cinétique est faible, c'est-à-dire, pour un moment d'inertie donné, que la vitesse angulaire est petite et que le moment de force τ est grand.

3 Marche à suivre

3.1) Détermination du moment d'inertie du gyroscope par la méthode du pendule

Attention : cette partie se fait sans faire tourner le disque avec le moteur!

- Fixer une masse *m* sur le disque du gyroscope.
- Enlever les charbons du moteur pour diminuer la friction (à voir avec l'assistant responsable)
- Mettre le pendule en mouvement et mesurer la durée de 5 oscillations afin de déterminer la période du mouvement.
- Effectuer 3 fois la mesure afin de déterminer la période moyenne avec son erreur statistique.
- Répéter la procédure avec une masse différente.

Calcul d'erreur: - Estimer les incertitudes sur les paramètres mesurés.
- Calculez l'incertitude résultante sur *I*.

3.2) Détermination du moment d'inertie du gyroscope par l'étude de la précession

- Mettre le gyroscope en rotation et le poser sur son palier à air (pression au mano-détendeur: > 4kg).
- Equilibrer précisément le gyroscope en déplaçant le contrepoids de manière à n'observer aucune précession. En principe, ce réglage est déjà fait et le gyroscope est alors en équilibre. Vous pouvez en profiter pour vérifier qualitativement les effets sur le gyroscope d'une force appliquée au niveau du contrepoids (intensité, direction et sens).
- Le mouvement de précession est produit en suspendant un poids supplémentaire à la barre (sous le contrepoids), qui induit un moment de force. Le choc introduit lors de l'installation du poids produit généralement un mouvement de nutation. On peut l'éviter en accrochant délicatement le poids, ou le compenser en accompagnant de la main le gyroscope au départ dans son mouvement de précession. Cela est nécessaire car les formules présentées auparavant font l'hypothèse que le mouvement est établi et stationnaire, et ne prend pas en compte les conditions initiales et transitoires.
- Mesurer la vitesse de précession pour 4 différentes vitesses de rotation propre du disque et pour 4 différents poids additionnels.

- Dans chaque cas, mesurer la fréquence de rotation du disque avec un stroboscope. Pour cela, faire flasher le stroboscope à une fréquence supérieure à la vitesse maximum prévisible (dans les systèmes mécaniques simples, 4000 tours/min est déjà considérable), puis baisser cette fréquence jusqu'à observer une image stable du disque, ce qui correspond au cas où les fréquences du stroboscope et de rotation du disque sont égales. Attention, d'autres fréquences plus faibles produisent également une image stable du disque, mais correspondent au cas où le disque effectue deux tours, trois tours, etc… entre deux flashs de la lampe stroboscopique.
- Pour optimiser le temps de vos mesures, il est recommandé de choisir une vitesse de rotation et de faire l'expérience avec chaque masse. Il est en effet plus rapide et plus précis de minimiser le nombre de changements de vitesse que de masse.
- Estimer les incertitudes sur les différentes grandeurs mesurées.
- Représenter graphiquement $\Omega = \Omega(m/\omega)$ avec les barres d'incertitude et en extraire le moment d'inertie *I* à partir de la pente du graphique.
- Comparer le résultat avec la valeur obtenue par la première méthode.

Travaux Pratiques de Physique

Expérience N°7 : Gyroscope

3.1) Détermination du moment d'inertie du gyroscope par la méthode du pendule

Distance entre la masse et l'axe de rotation:	*d* =		±		[cm]
Rayon de la masse:	*r* =		±		[cm]

	Mesure 1		Mesure 2		Mesure 3			
m **[g]**	**5·T_1 [s]**	**T_1 [s]**	**5·T_2 [s]**	**T_2 [s]**	**5·T_3 [s]**	**T_3 [s]**	**T [s]**	**σ_T [s]**

I_1 =		±		[kg·m^2]
I_2 =		±		[kg·m^2]

version fichier: 10/3/2014 (aw); rev 10/9/2017 (SSc)

Travaux Pratiques de Physique

Expérience N°7 : Gyroscope

3.2) Détermination du moment d'inertie du gyroscope par l'étude de la précession

Distance point d'appui / centre: l = ± [cm]

Incertitude sur les mesures de la vitesse de rotation: [t/min]
Incertitude sur les mesures du temps: [s]

	n [t/min]	ω [rad/s]	m/ω [kg·s]	$\Delta(m/\omega)$ [kg·s]	**T [s]**	Ω [rad/s]	$\Delta\Omega$ [rad/s]
m_1							
[g]							
m_2							
[g]							
m_3							
[g]							
m_4							
[g]							

Représentation graphique : $\Omega = \Omega\ (m/\omega)$

insérer graphique ici

Moment d'inertie:

***I* =**		[kg·m^2]
Δ*I* =		[kg·m^2]

version fichier: 10/3/2014 (aw); rev 10/9/2017 (SSc)