Calcul d'erreur (ou Propagation des incertitudes)

1) Introduction

Le mot "erreur" se réfère à quelque chose de juste ou de vrai. On parle d'erreur sur une mesure physique lorsqu'on peut la comparer à une valeur de référence qu'on peut considérer comme "vraie" (par ex: mesure de la vitesse de la lumière, de la température du zéro absolu).

Généralement, pour les mesures effectuées au laboratoire, on ne possède pas de valeur de référence et on ne connaît pas la valeur exacte de la grandeur mesurée (par ex. vitesse d'un projectile (tir)). On parle alors d'**incertitude**.

Le résultat Y d'une mesure dépend généralement de plusieurs grandeurs mesurées x_1, x_2, …. On parle alors d'une **grandeur composée**. Chaque grandeur mesurée a une certaine incertitude Δx_1, Δx_2,… et ces dernières vont se combiner pour produire l'incertitude totale ΔY sur le résultat Y. La façon dont l'incertitude de chaque paramètre individuel contribue à l'incertitude totale est décrite par la **propagation des incertitudes**.

La propagation des incertitudes est donc le terme correct pour l'expression improprement mais couramment utilisée de *calcul d'erreur*.

2) Mesure

Par mesure on entend soit le **dénombrement** d'un ensemble d'objets ou d'évènements (par ex. le comptage de processus de désintégration radioactive) soit la **comparaison** d'une grandeur à mesurer avec une **unité** de même espèce (par ex. comparaison d'une distance avec l'unité de longueur). Le résultat d'un dénombrement est déterminé de façon univoque par un nombre sans dimension, par contre le résultat d'une mesure par comparaison, c'est-à-dire le nombre mesuré, dépend du choix de l'unité. Il est donc tout aussi **important d'indiquer l'unité choisie que le nombre obtenu**.

Le **Système international d'unités** (abrégé en **SI**), inspiré du système métrique, est le système d'unités le plus largement employé au monde, qui est défini par la Conférence générale des poids et mesures. Il s'agit d'un système décimal (on passe d'une unité à ses multiples ou sous-multiples à l'aide de puissances de 10), sauf pour la mesure du temps. On parle aussi de système MKSA, en référence aux unités principale qui le compose : le mètre (longueur), le kilogramme (masse), la seconde (temps) et l'ampère (courant électrique). Ce système est composé de 7 unités de base; en plus des quatre précédentes, il y a encore le kelvin (température), la mole (quantité de matière) et la candela (intensité lumineuse). Toutes les autres unités sont déduites de ces unités de base, mais certaines possèdent un nom particulier (par exemple le Newton pour la force, 1 [N] = 1 [$kg \cdot m \cdot s^{-2}$]).

Il est essentiellement impossible de déterminer la vraie valeur d'une grandeur physique (par ex. la détermination de la masse d'un corps par pesée). Cela s'explique par le fait que les instruments de mesure utilisés, de même que les organes des sens dont on ne peut se passer, ne possèdent pas une sensibilité infinie. La limite de sensibilité se trouve imposée en dernier lieu par la structure atomique de la matière et les phénomènes de fluctuations statistiques qui y sont liés (par ex. le mouvement brownien). Un résultat de mesure aura par conséquent plus ou moins de chances de s'approcher de la vraie valeur de la grandeur à mesurer, suivant la finesse de l'instrument de mesure et l'habileté de l'expérimentateur.

3) Les incertitudes de mesure

On distingue différentes sortes d'erreurs dont toute mesure peut être affectée: les *erreurs systématiques*, les *erreurs accidentelles* et la *dispersion statistique*.

i) Les **erreurs systématiques** se produisent par exemple lorsqu'on emploie des unités mal étalonnées (échelle fausse, chronomètre mal ajusté) ou lorsqu'on néglige certains facteurs qui ont une influence sur la marche de l'expérience (par ex. l'influence du champ magnétique terrestre dans une mesure magnétique). Cela mène à un décalage (biais) du résultat si l'erreur commise est toujours la même. **Les erreurs systématiques influencent l'exactitude** (ou justesse) de la mesure (voir Fig. 1.c).

Dans la plupart des cas, les erreurs systématiques, pour autant qu'on connaisse leur cause, peuvent être prises en considération par une **correction** correspondante apportée au résultat de la mesure. Pour les mesures effectuées dans le cadre de travaux pratiques de physique, elles n'ont en général qu'une signification de second plan.

ii) Les **erreurs accidentelles** par contre ne peuvent en principe pas être évitées. Leur cause se trouve dans l'**expérimentateur** lui-même. La sûreté avec laquelle la main manie un instrument (par ex. l'arrêt d'un chronomètre), l'exactitude avec laquelle l'œil observe (par ex. la position d'une aiguille sur une échelle) ou l'acuité différentielle de l'oreille (par ex. pour la détermination d'un minimum d'intensité sonore) sont limitées. C'est la tâche de tout observateur d'être conscient des erreurs accidentelles de mesure, de les maintenir aussi faibles que possible et d'estimer ou calculer leur influence sur le résultat obtenu.

Les erreurs accidentelles affectent la précision (ou fidélité) de la mesure (Fig. 1.b).

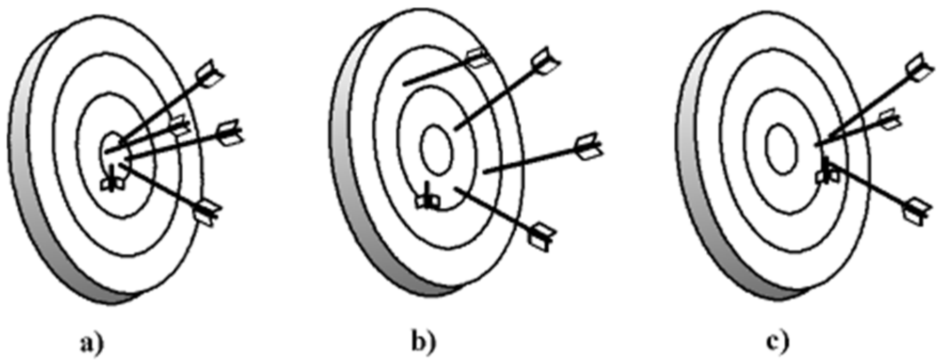

Fig. 1: Exactitude et précision: (a) Exact et précis; (b) Exact, pas précis; (c) Pas exact, mais précis.

iii) La **dispersion statistique** apparaît lorsqu'on fait des **mesures répétées** de la même grandeur. Si l'on mesure plusieurs fois le même phénomène avec un appareil de mesure suffisamment précis, on obtiendra à chaque fois un résultat différent x_i. Ceci est dû à des phénomènes perturbateurs (par ex. bruit de fond électronique, sensibilité d'un instrument aux variations de température) ou, pour des mesures extrêmement précises, à la nature aléatoire du phénomène (chaos, incertitude quantique).

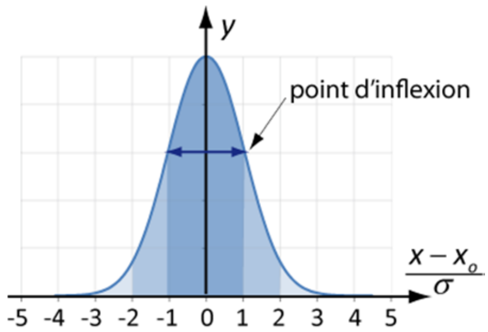

Fig. 2: Distribution de Gauss.

Pour un grand nombre de mesures et phénomènes physiques, on peut généralement postuler que la distribution des valeurs obtenues suit une **distribution de Gauss** (distribution normale). Notons que cette distribution n'est pas toujours valable comme le montre l'exemple des phénomènes de désintégration (distribution de Poisson).

La distribution de Gauss est caractérisée par deux paramètres (voir Fig. 2): sa **valeur moyenne x_o** et sa **variance σ^2** (ou **déviation standard** σ). Dans la distribution de Gauss, 68% des mesures sont comprises entre x_o-σ et x_o+σ, 95% entre x_o-2σ et x_o+2σ et 99.7% entre x_o-3σ et x_o+3σ.

La dispersion statistique affecte la précision de la mesure (Fig. 1b). Le but de répéter un grand nombre de fois (N fois) la mesure du même paramètre est d'obtenir une estimation aussi précise que possible de la vraie valeur cherchée x_o. On constate que **cette estimation sera d'autant plus précise que la distribution de Gauss est étroite**, c'est-à-dire que σ est petit. La méthode de mesure, les appareils utilisés ainsi que l'habileté de l'expérimentateur contribuent chacun à la grandeur de σ (par ex : un chronomètre électronique est plus précis qu'un chronomètre mécanique, un faisceau lumineux associé à une cellule photoélectrique sera plus précis que l'œil et la main de l'expérimentateur pour détecter le passage d'un projectile en un point).

Le meilleur estimateur de la vraie valeur x_o est la **moyenne arithmétique** $\overline{x}$ des N résultats individuels x_i:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (1)$$

De même, le meilleur estimateur de la variance de la distribution de x est donné par

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 \qquad (2)$$

Finalement, la précision avec laquelle on détermine x_o est donnée par la **variance de la moyenne** $\overline{x}$ qu'on note $\sigma_{\overline{x}}{}^2$:

$$\boxed{\sigma_{\overline{x}}{}^2 = \frac{1}{N}\sigma_x{}^2 = \frac{1}{N}\cdot\left[\frac{1}{(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right] = \frac{1}{N}\cdot\left[\frac{N}{(N-1)}\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)\right]}. \qquad (3)$$

Cette valeur varie inversement avec le nombre de mesures N. Ainsi, si on veut diminuer la déviation standard de la moyenne $\sigma_{\overline{x}}$ d'un résultat d'un facteur 2 (c'est-à-dire réduire l'incertitude de moitié), il faut quadrupler le nombre de mesures (ou alors améliorer la méthode et/ou les appareils, sans parler de l'expérimentateur!).

Le résultat de la mesure est finalement donné sous la forme : $\boxed{\overline{x} \pm \sigma_{\overline{x}}}$

A côté de l'erreur absolue $\sigma_{\overline{x}}$ d'un résultat de mesure, il est souvent commode d'indiquer l'**erreur relative** $\sigma_{\overline{x}}/\overline{x}$. L'erreur absolue a toujours la même dimension (même unité) que le résultat de la mesure lui-même. L'erreur relative n'a pas de dimension et s'exprime en % ou en ‰.

Chiffres significatifs: Le nombre de chiffres significatifs à indiquer dans un résultat est également fixé par le calcul des incertitudes. En donner trop est tout aussi faux que d'en donner trop peu! La convention admise est la suivante: tout résultat doit comporter un **nombre de chiffres significatifs tel que le dernier soit affecté de l'erreur fixée par le calcul des erreurs**; l'avant-dernier par contre est certain. Ainsi une masse M pesée à ±2 mg et trouvée égale par exemple à 25.3873 g sera donnée par: $\boxed{M = (25.387 \pm 0.002)\text{ g}}$.

4) Incertitudes sur une mesure composée; loi de propagation

Les mesures effectuées en physique sont le plus souvent indirectes, c'est-à-dire que le résultat final d'une expérience ne consiste pas en la mesure (répétée ou non) d'un seul paramètre, mais de plusieurs grandeurs qui, liées par une loi physique, conduisent au résultat cherché. Chacune de ces grandeurs a une certaine incertitude; le résultat de l'expérience en comportera aussi une qui dépend des incertitudes individuelles. On veut déterminer de quelle manière chacune de ces incertitudes se répercute sur la grandeur finale.

4.1) Propagation des incertitudes

Illustrons cela par un exemple simple (Fig. 3). Si on veut déterminer la surface d'une pièce, on mesure sa longueur l et sa largeur d et la surface est donnée par la fonction $S = ld$. Les distances mesurées comportent une incertitude Δl sur la longueur et Δd sur la largeur. Comment déduire l'incertitude ΔS sur la surface calculée?

Envisageons le cas le plus défavorable et considérons que les incertitudes augmentent chaque fois les grandeurs mesurées. L'incertitude ΔS sur la surface correspond alors à l'accroissement total de la surface (voir Fig. 3a) :

$$\Delta S = (l + \Delta l) \cdot (d + \Delta d) - ld = d\Delta l + l\Delta d + \Delta l \Delta d \quad . \tag{4}$$

Le dernier terme peut être négligé lorsque les incertitudes sur les grandeurs mesurées sont petites par rapport aux grandeurs elles-mêmes ($\Delta x << x$), ce qui permet de simplifier le calcul d'erreur en considérant la différentielle (variation) de la fonction par rapport aux différentes variables (Fig. 3b):

$$\Delta S = d\Delta l + l\Delta d = \left|\frac{\partial S}{\partial l}\right| \Delta l + \left|\frac{\partial S}{\partial d}\right| \Delta d \tag{5}$$

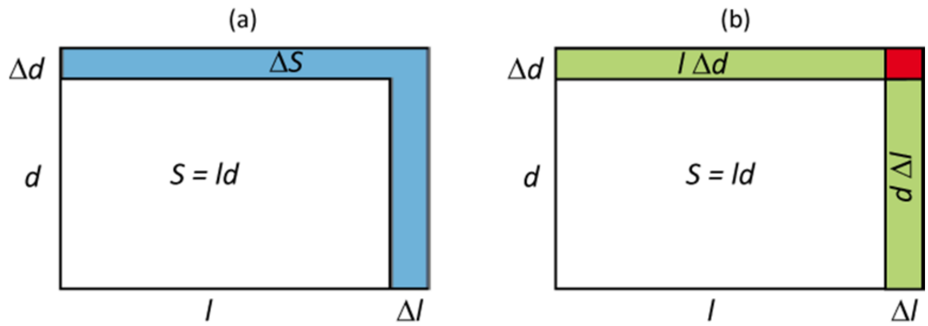

Fig. 3: Accroissement total (a) et différentielle (b) de la surface d'un rectangle de longueur l et de largeur d comportant des incertitudes. La différence entre ces deux grandeurs est le petit rectangle rouge dont la surface peut être négligée.

Plus généralement, on aura pour une fonction de plusieurs variables $f(x_1, x_2, x_3,\ldots)$:

$$\boxed{\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\right| \Delta x_3 + \ldots} \tag{6}$$

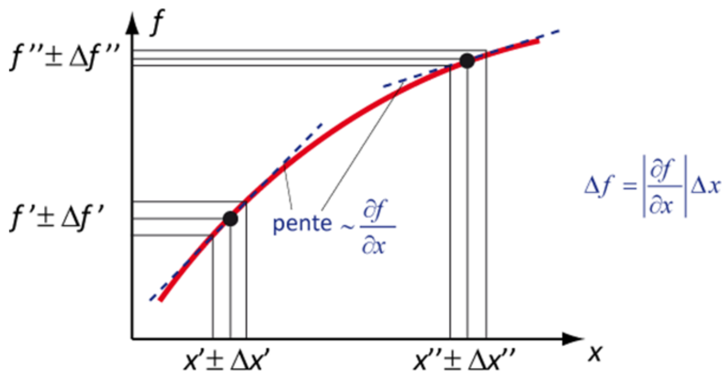

Fig. 4: L'incertitude Δf sur une grandeur f résultant de l'incertitude Δx sur une variable x dépend de la pente locale de la courbe $f(x)$, donnée par la dérivée partielle $\partial f/\partial x$ **.**

Le principe consiste donc à calculer la **dérivée partielle** (notée $\partial f/\partial x_i$) de la fonction f par rapport à chaque variable x_i, qui représente l'accroissement de la fonction f pour une petite variation de la variable x_i (voir Fig. 4).

Rappel : la dérivée partielle d'une fonction par rapport à une variable x_i consiste à dériver la fonction par rapport à x_i en considérant toutes les autres variables comme des constantes.

Quelques cas simples :

L'application de la propagation des incertitudes décrite par la formule générale (6) devient particulièrement simple dans les cas particuliers suivants, souvent rencontrés en pratique :

Somme/différence: lorsque la grandeur composée n'est constituée que de sommes ou de différences:

$$y = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \ldots, \text{ alors } \boxed{\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots} \qquad (7)$$

Dans une somme (différence), les erreurs absolues s'additionnent.

Produit/quotient: lorsque la grandeur composée n'est constituée que de produits ou de quotients:

$$y = x_1 \cdot x_2 / x_3 \cdot \ldots, \text{ alors } \boxed{\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3}{x_3} + \ldots} \qquad (8)$$

Dans un produit (quotient), les erreurs relatives s'additionnent.

Produit de puissances: lorsque la grandeur composée n'est constituée que d'un produit de puissances

$$y = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} \cdot x_3^{\gamma} \cdot \ldots\ldots, \text{ alors } \boxed{\frac{\Delta y}{y} = |\alpha|\frac{\Delta x_1}{x_1} + |\beta|\frac{\Delta x_2}{x_2} + |\gamma|\frac{\Delta x_3}{x_3} + \ldots} \qquad (9)$$

Dans tous les autres cas (par ex. en présence de relations trigonométriques, de logarithmes, de racines, etc…), la formule générale (6) doit être utilisée en calculant toutes les dérivées partielles.

Exemple : la période d'oscillation T d'un pendule simple dépend de la longueur l du pendule: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. En mesurant la longueur du pendule et sa période (donc ici deux mesures), on obtient de façon simple l'accélération de la pesanteur g: $g = 4\pi^2 l/T^2$. L'incertitude sur g est obtenue à partir des incertitudes sur l et T par:

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\Delta l + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\Delta T = \underline{\underline{4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}\Delta l + \frac{2l}{T^3}\Delta T\right)}} \qquad (10)$$

Méthode simplifiée: selon (8), $g = 4\pi^2 \dfrac{l}{T \cdot T}$ (quotient → erreurs relatives s'ajoutent)

$$\Rightarrow \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta T}{T} \Rightarrow \Delta g = \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta T}{T}\right)g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta T}{T}\right) = \underline{\underline{4\pi^2\left(\frac{\Delta l}{T^2} + \frac{2l\Delta T}{T^3}\right)}}$$

4.2) <u>Propagation de la dispersion statistique</u>

Si les valeurs des différentes grandeurs x_i ont été obtenues par une **moyenne statistique sur un nombre de mesures répétées**, l'incertitude sur chaque paramètre est donnée par la dispersion statistique ou déviation standard $\sigma_{\bar{x}}$ (voir §3.iii). Si les différentes variables sont *indépendantes*, les incertitudes se combinent aléatoirement de sorte que la variance sur la grandeur combinée est donné par:

$$\boxed{\sigma_{\bar{f}}^{\ 2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{\bar{x}_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{\bar{x}_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \sigma_{\bar{x}_3}^2 + \ldots \quad \text{et} \quad \sigma_{\bar{f}} = \sqrt{\sigma_{\bar{f}}^{\ 2}}} \qquad (11)$$

5) Loi physique à vérifier expérimentalement; régression linéaire

Dans de nombreuses expériences effectuées en physique, la détermination d'une grandeur se réalise en vérifiant une loi faisant intervenir la grandeur en question. La vérification expérimentale d'une loi théorique reliant plusieurs grandeurs physiques peut se faire simplement en s'efforçant de mettre la loi sous une forme linéaire par un changement de variable approprié.

Rappel: la forme analytique d'une droite est $y = px+h$; p = pente, h = ordonnée à l'origine.

Exemple: dans le pendule simple, la période d'oscillation dépend de la longueur du pendule de la manière suivante : $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. On peut décrire ce phénomène par une relation linéaire en représentant T^2 en fonction de l: $T^2 = \left(4\pi^2/g\right)l$.

Les points de mesures (x_i, y_i) sont alors reportés avec leurs barres d'incertitudes sur un système d'axes orthogonaux, ce qui permet de reconnaître immédiatement si la loi est vérifiée en examinant l'alignement des points expérimentaux (voir Fig. 5). **Les barres d'erreur consistent en des segments horizontaux et verticaux de longueur Δx_i et Δy_i portés de part et d'autre de chaque point** (x_i, y_i). On voit qu'il est de première importance de reporter les points de mesures avec leur domaine d'erreur préalablement à toute discussion concernant la validité de la loi à vérifier.

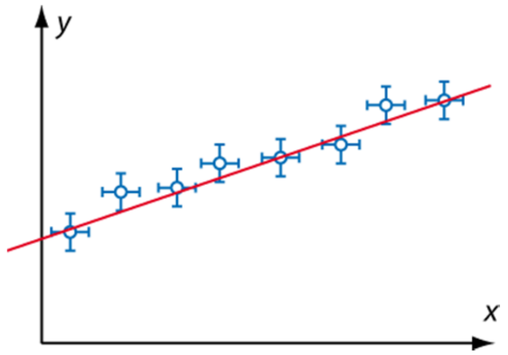

Fig. 5: Principe de la vérification expérimentale d'une loi physique sous forme graphique.

Régression linéaire:

Pour vérifier la linéarité d'une relation, on cherche à faire passer la "*meilleure droite*" (appelée aussi **droite de régression**) par tous les points de mesure (avec leurs barres d'erreur). Ceci se fait manuellement ("à l'œil") ou par calcul (méthode des moindre carrés).

Méthode manuelle:
La meilleure droite passant par les points donne la pente p_o de la relation entre y et x. L'erreur sur la pente est obtenue en considérant les droites "extrêmes" de pente p_{max} et p_{min} passant à peu près par 2/3 des points expérimentaux (avec leurs erreurs). L'erreur sur la pente est alors donnée par: $\Delta p = (p_{max} - p_{min})/2$.

Moindres carrés:
Une méthode couramment utilisée pour obtenir la droite représentative du phénomène décrit par les points (x_i, y_i) est basée sur la méthode des moindres carrés, qui minimalise la somme des écarts verticaux $\sum_{i=1}^{N}(y_i - y_{\text{théo}})^2$ entre les points expérimentaux et la droite, où $y_{\text{théo}}$ représente l'ordonnée des points sur la droite optimale. Les coefficients de la droite de régression (pente p et ordonnée à l'origine h) peuvent être obtenus par calcul avec un tableur ou autre logiciel dédié. Il faut toutefois noter que la régression linéaire ainsi obtenue (par exemple en utilisant une courbe de tendance standard du logiciel Excel) ne tient pas compte des incertitudes sur les points de mesures, ce qui fait qu'on point connu avec une grande précision a le même poids dans le calcul de la droite qu'un point entaché d'une grande imprécision. De plus, il serait plus correct de considérer les distances absolues entre les points et la droite plutôt que les distances verticales qui sont plus faciles à traiter. Pour ces raisons, les régressions linéaires seront effectuées aux TP de Physique avec une macro spéciale implémentée dans Excel et non pas avec l'outil standard de courbe de tendance. Cela permettra en particulier de déterminer les incertitudes Δp et Δh sur les paramètres de la droite.

Dans tous les cas, le résultat est indiqué sous la forme $\boxed{p = p_0 \pm \Delta p}$

Exemple: Vérification de la loi du pendule $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ et détermination de l'accélération terrestre g. On met d'abord la formule à vérifier sous la forme linéaire appropriée $T^2 = 4\pi^2\, l/g$.
Les variables mesurées expérimentalement sont les couples ($l_i \pm \Delta l_i$, $T_i \pm \Delta T_i$), où Δl_i et ΔT_i sont les incertitudes sur les mesures de l_i et de T_i. La représentation linéaire exige de transformer

ces couples pour obtenir les grandeurs adéquates (l_i±Δl_i, T_i^2±$\Delta(T_i^2)$) qui sont alors reportées graphiquement comme indiqué sur la Fig. 6.

La pente p de la droite de régression correspond à $p = 4\pi^2/g$ d'où l'on déduit l'accélération terrestre $g = 4\pi^2/p$. L'erreur sur g s'obtient à partir de l'erreur sur la pente par la formule générale (6): $\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial p}\right| \Delta p = \frac{4\pi^2}{p^2} \Delta p$

Remarque: Dans ce cas, on peut appliquer directement la formule simplifiée (8) car on a ici un quotient de sorte que les erreurs relatives s'ajoutent simplement:

$$\Delta g/g = \Delta p/p \;\Rightarrow\; \Delta g = (\Delta p/p)g = \frac{4\pi^2}{p^2} \Delta p$$

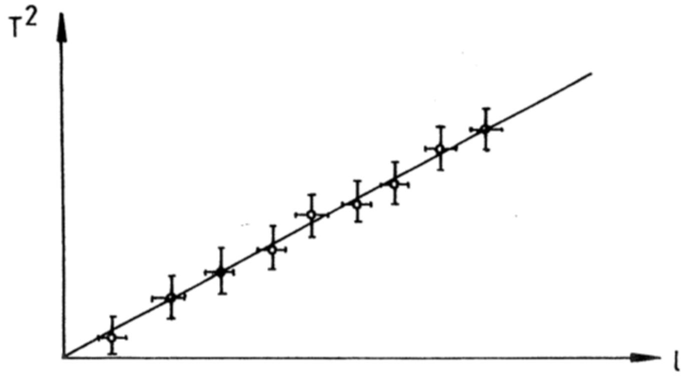

Fig. 6: Vérification expérimentale de la loi du pendule et détermination de l'accélération terrestre *g* par la pente du graphique.