Mathématiques de la vie quotidienne

Paul Jolissaint

13 janvier 2017

Les congruences

Les congruences

Elles sont basées sur l'arithmétique (entière), et plus précisément sur la **division euclidienne**.

Les congruences

Elles sont basées sur l'arithmétique (entière), et plus précisément sur la **division euclidienne**.

Celle-ci désigne tout simplement la division d'un entier par un autre avec reste.

Les congruences

Elles sont basées sur l'arithmétique (entière), et plus précisément sur la **division euclidienne**.

Celle-ci désigne tout simplement la division d'un entier par un autre avec reste.

Exemples

Les congruences

Elles sont basées sur l'arithmétique (entière), et plus précisément sur la **division euclidienne**.

Celle-ci désigne tout simplement la division d'un entier par un autre avec reste.

Exemples

(1) La division euclidienne de 17 par 3 est :

$$17 = 5 \times 3 + 2 = 5 \cdot 3 + 2$$

Les congruences

Elles sont basées sur l'arithmétique (entière), et plus précisément sur la **division euclidienne**.

Celle-ci désigne tout simplement la division d'un entier par un autre avec reste.

Exemples

(1) La division euclidienne de 17 par 3 est :

$$17 = 5 \times 3 + 2 = 5 \cdot 3 + 2$$

(2) Celle de 545 par est 4 est

$$545 = 136 \cdot 4 + 1.$$

Les nombres 2 et 1 sont les **restes** respectifs, et 5 et 136 les **quotients**.

Les nombres 2 et 1 sont les **restes** respectifs, et 5 et 136 les **quotients**.

La division d'un entier a par un entier m donne un unique quotient et un unique reste à condition d'imposer que le reste soit inférieur à m :

$$a = q \cdot m + r \quad (0 \leq r < m).$$

Les nombres 2 et 1 sont les **restes** respectifs, et 5 et 136 les **quotients**.

La division d'un entier a par un entier m donne un unique quotient et un unique reste à condition d'imposer que le reste soit inférieur à m :

$$a = q \cdot m + r \quad (0 \leq r < m).$$

Dans la suite, ce sont les restes qui vont nous intéresser.

Définition *On fixe un entier $m > 1$. On dit que deux entiers a et b sont* ***congrus modulo*** *m s'ils ont le même reste par la division par m (ou si $a - b$ est divisible par m).*

Définition *On fixe un entier $m > 1$. On dit que deux entiers a et b sont* ***congrus modulo*** *m s'ils ont le même reste par la division par m (ou si $a - b$ est divisible par m).*

On note : $a \equiv b \pmod{m}$

Définition *On fixe un entier $m > 1$. On dit que deux entiers a et b sont **congrus modulo** m s'ils ont le même reste par la division par m (ou si $a - b$ est divisible par m).*

On note : $a \equiv b \pmod{m}$

Exemples

Définition *On fixe un entier $m > 1$. On dit que deux entiers a et b sont* ***congrus modulo*** *m s'ils ont le même reste par la division par m (ou si $a - b$ est divisible par m).*

On note : $a \equiv b \pmod{m}$

Exemples

(1) Prenons $m = 2$. Dire que deux nombres entiers sont congrus modulo 2 revient à dire qu'ils ont la même parité. En effet, les restes possibles de la division par 2 sont 0 et 1 ; les nombres dont le reste est 0 sont les nombres pairs, et les autres sont les nombres impairs.

Définition *On fixe un entier $m > 1$. On dit que deux entiers a et b sont* ***congrus modulo*** *m s'ils ont le même reste par la division par m (ou si $a - b$ est divisible par m).*

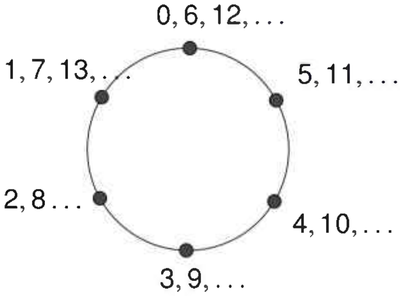
On note : $a \equiv b \pmod{m}$

Exemples

(1) Prenons $m = 2$. Dire que deux nombres entiers sont congrus modulo 2 revient à dire qu'ils ont la même parité. En effet, les restes possibles de la division par 2 sont 0 et 1 ; les nombres dont le reste est 0 sont les nombres pairs, et les autres sont les nombres impairs.

(2) Prenons maintenant $m = 10$. Dire que deux nombres sont congrus modulo 10 revient à dire qu'ils ont le même chiffre des unités : $357 \equiv 407 \equiv 7 \pmod{10}$, $23 \equiv 12093 \equiv 3 \pmod{10}$.

La notation est due à Gauss et provient du verbe latin *congruere* qui signifie « se rencontrer en route » et du substantif *modulus* qui signifie « mesure ».
Ainsi, affirmer que $14 \equiv 2 \pmod 6$ signifie que 14 rencontre 2 lorsqu'on prend 6 comme mesure.
On peut illustrer cela en enroulant un ruban gradué sur un cercle de 6 unités de circonférence : $0, 6, 12, 18, \ldots$ tombent au même point ; de même pour les autres entiers $1, 7, 13, 19, \ldots$ etc.



On exprime également les heures modulo 12 lorsqu'on parle de 1 heure au lieu de 13 heures, etc.

Propriétés importantes des congruences :

Si $A \equiv a \pmod{m}$ et $B \equiv b \pmod{m}$ alors

$$A \pm B \equiv a \pm b \pmod{m}$$

et

$$A \cdot B \equiv a \cdot b \pmod{m}.$$

Exemple $15 \equiv 5 \pmod{10}$ et $28 \equiv 8 \pmod{10}$. Alors $15 + 28 \equiv 5 + 8 \pmod{10}$. En effet, $15 + 28 = 43$ et $5 + 8 = 13$ sont tous deux congrus à $3 \pmod{10}$.

Une première application : la preuve par 9

Une première application : la preuve par 9

Soit à multiplier 436 par 59 ; on trouve $25'724$:

Une première application : la preuve par 9

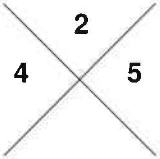
Soit à multiplier 436 par 59 ; on trouve 25′724 :

$$\begin{array}{rrrrr} & & 4 & 3 & 6 \\ & \times & & 5 & 9 \\ \hline & 3 & 9 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 8 & 0 & \\ \hline 2 & 5 & 7 & 2 & 4 \end{array}$$

La **preuve par** 9 consiste à effectuer les vérifications suivantes : tout d'abord,

$$4+3+6=13,\ 1+3=\mathbf{4};\ 5+9=14,\ 1+4=\mathbf{5}$$

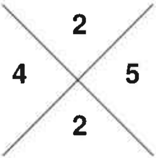
puis le produit $4 \cdot 5 = 20$ qui donne $2+0=2$. On place les valeurs 4 et 5 de part et d'autre de la croix et 2 en haut :


2
4
5

On calcule enfin :

$$2 + 5 + 7 + 2 + 4 = 20, \; 2 + 0 = 2$$

que l'on place enfin dans la partie inférieure du tableau.



La multiplication est considérée comme correcte si les deux nombres verticaux sont égaux.

Les calculs dans les vérifications ne sont rien d'autre que des calculs modulo 9 :

Les calculs dans les vérifications ne sont rien d'autre que des calculs modulo 9 :

En effet, il est évident que $10 \equiv 1 \pmod{9}$, que $100 \equiv 1 \pmod{9}$ etc.

Les calculs dans les vérifications ne sont rien d'autre que des calculs modulo 9 :

En effet, il est évident que $10 \equiv 1 \pmod 9$, que $100 \equiv 1 \pmod 9$ etc.

Ainsi, modulo 9,

$$\begin{aligned} 436 &= 4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 6 \\ &\equiv 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 = 13 \\ &= 1 \cdot 10 + 3 \equiv 1 + 3 = 4 \pmod 9. \end{aligned}$$

La preuve par 9 n'est pas une preuve au sens mathématique du terme car elle ne détecte pas les erreurs suivantes :

- Remplacement d'un 0 par un 9 ou inversement
- Permutation de deux chiffres.

Une seconde application : le code ISBN (International Standard Book Number)

Une seconde application : le code ISBN (International Standard Book Number)

Plus précisément, nous allons présenter le code ISBN-10, qui sert à répertorier les livres. Par exemple,

$$0 - 7167 - 2378 - 6.$$

Une seconde application : le code ISBN (International Standard Book Number)

Plus précisément, nous allons présenter le code ISBN-10, qui sert à répertorier les livres. Par exemple,

$$0 - 7167 - 2378 - 6.$$

Il se présente sous la forme suivante :

$$c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7 c_8 c_9 \mathbf{c_{10}}$$

où les 9 premiers symboles sont des chiffres entre 0 et 9 et où c_{10} est un nombre compris entre 0 et 10. Lorsque $c_{10} = 10$, on le note X (de manière à conserver 10 symboles).

Les chiffres sont répartis en quatre segments (séparés par des tirets, pour des questions de facilité de lecture) :

Les chiffres sont répartis en quatre segments (séparés par des tirets, pour des questions de facilité de lecture) :

- le premier indique la zone linguistique du livre ; par exemple, 0 et 1 pour les pays anglo-saxons, 2 pour les francophones, 3 pour les germanophones...

Les chiffres sont répartis en quatre segments (séparés par des tirets, pour des questions de facilité de lecture) :

- le premier indique la zone linguistique du livre ; par exemple, 0 et 1 pour les pays anglo-saxons, 2 pour les francophones, 3 pour les germanophones...
- le deuxième correspond à l'éditeur ;

Les chiffres sont répartis en quatre segments (séparés par des tirets, pour des questions de facilité de lecture) :

- le premier indique la zone linguistique du livre ; par exemple, 0 et 1 pour les pays anglo-saxons, 2 pour les francophones, 3 pour les germanophones...
- le deuxième correspond à l'éditeur ;
- le troisième correspond au livre lui-même ;

Les chiffres sont répartis en quatre segments (séparés par des tirets, pour des questions de facilité de lecture) :

- le premier indique la zone linguistique du livre ; par exemple, 0 et 1 pour les pays anglo-saxons, 2 pour les francophones, 3 pour les germanophones...
- le deuxième correspond à l'éditeur ;
- le troisième correspond au livre lui-même ;
- enfin, c_{10} est un nombre de contrôle, calculé à partir des 9 premiers.

Le nombre de contrôle c_{10} est calculé de la manière suivante :

Le nombre de contrôle c_{10} est calculé de la manière suivante :

$$c_{10} \equiv c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + 6c_6 + 7c_7 + 8c_8 + 9c_9 \pmod{11}$$

Le nombre de contrôle c_{10} est calculé de la manière suivante :

$$c_{10} \equiv c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 + 6c_6 + 7c_7 + 8c_8 + 9c_9 \pmod{11}$$

Par exemple, calculons c_{10} pour le code ci-dessus $0 - 7167 - 2378$:

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8$$

$$= 237 = 21 \cdot 11 + 6 \equiv 6 \pmod{11}.$$

Variante : le nombre de contrôle de $4 - 7167 - 2378$ est X car

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8$$

$$= 241 = 21 \cdot 11 + 10 \equiv 10 \pmod{11}.$$

On imprimera donc :

$$4 - 7167 - 2378 - X$$

à l'endroit prévu à cet effet sur le livre.

Qualités du code ISBN-10 :

Qualités du code ISBN-10 :

- il détecte toute erreur sur un symbole ;

Qualités du code ISBN-10 :

- il détecte toute erreur sur un symbole ;
- il détecte les erreurs dues à la permutation de deux symboles.

Qualités du code ISBN-10 :

- il détecte toute erreur sur un symbole ;
- il détecte les erreurs dues à la permutation de deux symboles.

  Raison : le nombre 11 est un nombre premier (*i.e.* divisible uniquement par 1 et lui-même).

Lorsque le code ISBN d'un livre est lu par une machine, celle-ci calcule le nombre de contrôle puis le compare à celui qu'elle a lu. Elle accepte le code s'ils sont égaux, et le refuse sinon.

Expliquons pourquoi une erreur est détectée à coup sûr :

Expliquons pourquoi une erreur est détectée à coup sûr :

- Si l'erreur se trouve dans le nombre de contrôle, c'est évident.

Expliquons pourquoi une erreur est détectée à coup sûr :

- Si l'erreur se trouve dans le nombre de contrôle, c'est évident.
- Supposons alors que l'erreur se trouve dans un des 9 premiers chiffres dans le code $4 - 7167 - 2378 - X$, par exemple que la machine lise

$$4 - 716\mathbf{3} - 2378 - X.$$

Expliquons pourquoi une erreur est détectée à coup sûr :

- Si l'erreur se trouve dans le nombre de contrôle, c'est évident.
- Supposons alors que l'erreur se trouve dans un des 9 premiers chiffres dans le code $4 - 7167 - 2378 - X$, par exemple que la machine lise

$$4 - 716\mathbf{3} - 2378 - X.$$

Pour que l'erreur ne soit pas détectée, il faudrait que les deux calculs donnent la même valeur pour c_{10}, c'est-à-dire que la différence entre les lignes de calcul (correcte–fausse) soit un multiple de 11.

Or, en soustrayant les lignes de calcul, on a :

$$(1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8)$$

$$-(1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot \mathbf{3} + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8)$$

$$= 5 \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 4.$$

Comme 11 est premier, le résultat de $5 \cdot 4$ ne peut pas être un multiple de 11, et donc les nombres de contrôle seront à coup sûr différents !
Le même raisonnement s'applique quelle que soit la position et la valeur de l'erreur, ainsi que dans le cas de la permutation de deux chiffres.

Dès janvier 2007, l'ISBN-10 a été remplacé pour les nouveaux livres par l'ISBN-13 qui est dérivé d'une norme plus générale appelée EAN-13 (*European Article Numbering*, codes à barres).

En effet, théoriquement, l'ISBN-10 permet de coder 1 milliard de livres (c'est le nombre de choix total de 9 symboles distincts parmi 10 disponibles).
Cependant, dans la réalité, compte tenu des contraintes concernant les deux premiers segments, le nombre total réel est sensiblement inférieur.

De grandes maisons d'édition devaient alors rechercher des accords avec d'autres éditeurs ayant des ressources de numéros libres dans les groupes de numérotation qui leur avaient été attribués dans le passé.

Le code ISBN-13 est formé d'abord de 3 chiffres (pour l'instant 978 ou 979 pour les livres) suivi du même schéma de 10 chiffres que dans son prédécesseur, le dernier chiffre étant un chiffre de contrôle calculé de la façon suivante : si l'ISBN-13 d'un livre est $c_1 c_2 \ldots c_{13}$ alors

$$1 \cdot c_1 + 3 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3 + 3 \cdot c_4 + \ldots + 1 \cdot c_{11} + 3 \cdot c_{12} + c_{13} \equiv 0 \pmod{10}.$$

Ainsi, c_{13} est un des chiffres 0 à 9, et l'emploi de X devient inutile. Pour les livres d'avant 2007, le nouvel ISBN se calcule à partir de l'ancien comme dans l'exemple suivant.

Exemple Si l'ISBN-10 est 2-86889-006-7, alors l'ISBN-13 correspondant est de la forme 978286889006x où x est tel que

$$9+3\cdot 7+8+3\cdot 2+8+3\cdot 6+8+3\cdot 8+9+3\cdot 0+0+$$

$$+3\cdot 6+x=129+x\equiv 0 \pmod{10}$$

donc $x=1$ et l'ISBN-13 vaut 9782868890061.

Les moyennes

Les moyennes

Moyenne arithmétique

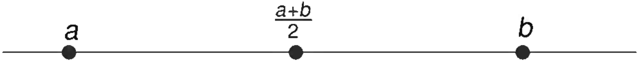
Les moyennes

Moyenne arithmétique

C'est la plus connue des moyennes :

$$\frac{a+b}{2}$$

Géométriquement, si on place les valeurs $a < b$ sur une règle graduée, alors leur moyenne arithmétique se trouve à égale distance de a et b.



La moyenne arithmétique a toutefois un défaut : elle est trop sensible aux grandes valeurs.
Par exemple, supposons que les 11 salaires d'une entreprise soient les suivants : 10 fois $1'000$ francs et 1 fois $20'000$ francs. La moyenne des 11 salaires est

$$\frac{10 \cdot 1'000 + 20'000}{11} = 2'727,27.$$

Moyenne géométrique

Moyenne géométrique

En mars 2014, le Conseiller d'état bernois Philippe Perrenoud (PSJB) a été réélu au Conseil Exécutif devant Manfred Bühler (UDC) grâce à la moyenne géométrique : pourtant, au niveau cantonal, MB a obtenu 94′957 suffrages, alors que PP n'en a obtenu que 86′469 (8′488 de moins). Mais ce dernier a obtenu 5′889 suffrages dans le Jura bernois, et MB seulement 4′919 (donc 970 de moins).

Moyenne géométrique

En mars 2014, le Conseiller d'état bernois Philippe Perrenoud (PSJB) a été réélu au Conseil Exécutif devant Manfred Bühler (UDC) grâce à la moyenne géométrique : pourtant, au niveau cantonal, MB a obtenu 94′957 suffrages, alors que PP n'en a obtenu que 86′469 (8′488 de moins). Mais ce dernier a obtenu 5′889 suffrages dans le Jura bernois, et MB seulement 4′919 (donc 970 de moins).

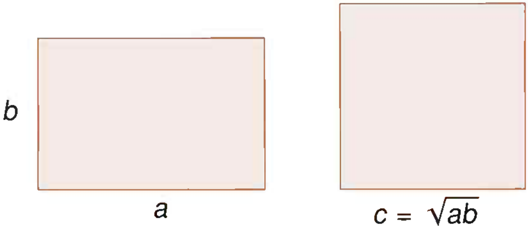
Art. 84, al. 2 de la Constitution bernoise : Un siège est garanti au Jura bernois. Est éligible tout citoyen et toute citoyenne de langue française qui réside dans le district de Courtelary, de Moutier ou de La Neuveville.

Art. 85, al. 4 : Les suffrages recueillis par les candidats et les candidates du Jura bernois sont comptés séparément à l'échelle du canton et à celle du Jura bernois. Le siège garanti au Jura bernois est attribué au candidat ou à la candidate qui obtient la moyenne géométrique la plus élevée.

La **moyenne géométrique** de deux nombres (positifs) a et b est

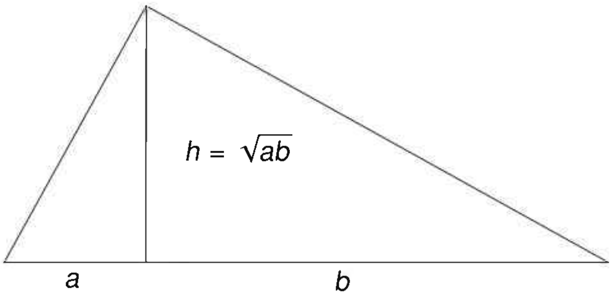
$$m_g = \sqrt{a \cdot b} \quad (i.e.\ m_g^2 = a \cdot b)$$

Elle est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique.
Elle admet l'interprétation suivante : c'est le côté c du carré qui a même aire que le rectangle de côtés a et b.



La moyenne géométrique intervient également dans le **théorème de la hauteur** dans le cadre des triangles rectangles :

La moyenne géométrique intervient également dans le **théorème de la hauteur** dans le cadre des triangles rectangles :



Plus généralement, la moyenne géométrique de n nombres $a_1, \ldots, a_n$ est

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Elle est beaucoup moins sensible que la moyenne arithmétique aux grandes valeurs : si on la calcule pour les 11 salaires ci-dessus, on obtient

$$\sqrt[11]{1000^{10} \cdot 20000} = 1313.03.$$

Mieux : elle favorise les petites valeurs.

Retour à l'élection bernoise de mars 2014 :

Retour à l'élection bernoise de mars 2014 :

Résultats de PP :

$$m_g(PP) = \sqrt{5'889 \cdot 86'469} \approx 25'565.81.$$

Retour à l'élection bernoise de mars 2014 :

Résultats de PP :

$$m_g(PP) = \sqrt{5'889 \cdot 86'469} \approx 25'565.81.$$

Résultats de MB :

$$m_g(MB) = \sqrt{4'919 \cdot 94'957} \approx 21'612.35.$$

Retour à l'élection bernoise de mars 2014 :

Résultats de PP :

$$m_g(PP) = \sqrt{5'889 \cdot 86'469} \approx 25'565.81.$$

Résultats de MB :

$$m_g(MB) = \sqrt{4'919 \cdot 94'957} \approx 21'612.35.$$

Moyennes arithmétiques :

$$m_a(PP) = 46'179 \quad m_a(MB) = 49'788.$$

Avec ses 4′919 suffrages provenant du Jura bernois, il aurait fallu à MB plus de 8′500 suffrages supplémentaires au niveau du canton pour battre PP.

Avec ses 4′919 suffrages provenant du Jura bernois, il aurait fallu à MB plus de 8′500 suffrages supplémentaires au niveau du canton pour battre PP.

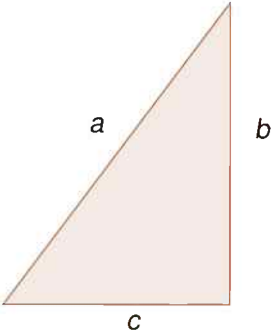
L'introduction de la moyenne géométrique dans la constitution bernoise est due au Prof. H. Carnal qui s'est inspiré de travaux de J. Nash.

Quelques nombres

Le nombre $\sqrt{2}$

Le nombre $\sqrt{2}$

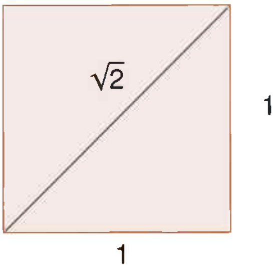
Il apparait dans une application du **théorème de Pythagore** :



$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Prenons un carré de côté 1 ; alors sa diagonale d a pour longueur $\sqrt{2}$ par le théorème de Pythagore :

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1.414.$$



Ce nombre a fortement perturbé les pythagoriciens (VI^{e} siècle avant JC) qui étaient persuadés que tous les nombres étaient **rationnels**, *i.e.* pouvant s'écrire sous la forme d'un rapport de deux entiers (22/7, 247/17, etc.).

Ce nombre a fortement perturbé les pythagoriciens (VI^{e} siècle avant JC) qui étaient persuadés que tous les nombres étaient **rationnels**, *i.e.* pouvant s'écrire sous la forme d'un rapport de deux entiers (22/7, 247/17, etc.).

Or, on démontre que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme rapport de deux entiers ! C'est un **nombre irrationnel**, comme π par exemple.

Voici d'ailleurs les conditions requises pour devenir pythagoricien :

Voici d'ailleurs les conditions requises pour devenir pythagoricien :

- Chausse d'abord le pied droit, mais déchausse d'abord le pied gauche !

Voici d'ailleurs les conditions requises pour devenir pythagoricien :

- Chausse d'abord le pied droit, mais déchausse d'abord le pied gauche !
- Ne te laisse pas prendre par le fou rire !

Voici d'ailleurs les conditions requises pour devenir pythagoricien :

- Chausse d'abord le pied droit, mais déchausse d'abord le pied gauche !
- Ne te laisse pas prendre par le fou rire !
- N'urine pas face au Soleil !

Voici d'ailleurs les conditions requises pour devenir pythagoricien :

- Chausse d'abord le pied droit, mais déchausse d'abord le pied gauche !
- Ne te laisse pas prendre par le fou rire !
- N'urine pas face au Soleil !
- Crache sur les cheveux qu'on t'a coupés et sur les rognures d'ongles !

Voici d'ailleurs les conditions requises pour devenir pythagoricien :

- Chausse d'abord le pied droit, mais déchausse d'abord le pied gauche !
- Ne te laisse pas prendre par le fou rire !
- N'urine pas face au Soleil !
- Crache sur les cheveux qu'on t'a coupés et sur les rognures d'ongles !
- Abstiens-toi de manger du queue-noire : il est réservé aux dieux chtoniens !

Voici d'ailleurs les conditions requises pour devenir pythagoricien :

- Chausse d'abord le pied droit, mais déchausse d'abord le pied gauche !
- Ne te laisse pas prendre par le fou rire !
- N'urine pas face au Soleil !
- Crache sur les cheveux qu'on t'a coupés et sur les rognures d'ongles !
- Abstiens-toi de manger du queue-noire : il est réservé aux dieux chtoniens !
- Ne te regarde pas dans un miroir à la lumière d'une lampe !

On rencontre le nombre $\sqrt{2}$ dans le **format de papier DIN** (*Deutsches Institut für Normung*), inventé en 1922 et qui correspond à la norme ISO216.

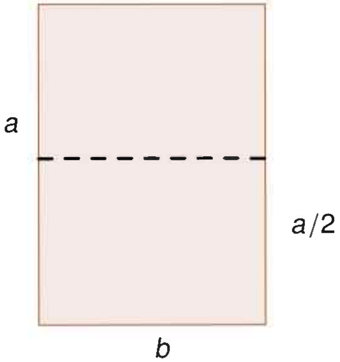
On rencontre le nombre $\sqrt{2}$ dans le **format de papier DIN** (*Deutsches Institut für Normung*), inventé en 1922 et qui correspond à la norme ISO216.

Série A : Les dimensions vont du format A0 (aire d'un m^2) au format A8 (carte de visite).

On rencontre le nombre $\sqrt{2}$ dans le **format de papier DIN** (*Deutsches Institut für Normung*), inventé en 1922 et qui correspond à la norme ISO216.

Série A : Les dimensions vont du format A0 (aire d'un m^2) au format A8 (carte de visite).

Propriété : on veut que lorsqu'on passe d'un format au suivant, l'aire soit divisée par 2 mais que le rapport longueur/largeur soit conservé.


a
a/2
b

Calculons le rapport longueur/largeur, c'est-à-dire a/b : on veut

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2}$$

donc

$$\frac{a^2}{2} = b^2$$

et ainsi

$$a^2 = 2b^2 \quad \text{qui implique} \quad \boxed{a = \sqrt{2} \cdot b = 1.414 \cdot b.}$$

Pour le format A0, on doit avoir $ab = 1$ (en m^2), donc

$$\sqrt{2}b \cdot b = 1$$

ou

$$b^2 = 1 / \sqrt{2}$$

ce qui donne

$$b \approx 0.841 \text{ m} = 841 \text{ mm}$$

et finalement

$$a \approx 1.414 \cdot 841 = 1'189 \text{ mm}.$$

Pour passer ensuite d'un format au suivant, il suffit de diviser longueur et largeur par $\sqrt{2}$. Par exemple, pour obtenir les dimensions du format A4, il faut diviser celles de A0 par $(\sqrt{2})^4 = 4$, ce qui donne

$$a = 297 \text{ mm} \quad \text{et} \quad b = 210 \text{ mm}.$$

La **série B** est définie ainsi : B0 a pour dimensions 1000×1414 mm^2, puis les dimensions de Bn sont respectivement les moyennes géométriques des dimensions A$n-1$ et An.
Par exemple, B4 a pour dimensions

$$\sqrt{210 \cdot 297} = 250 \text{ mm} \quad \text{et} \quad \sqrt{297 \cdot 420} = 353 \text{ mm}.$$

La première provient de A4 et la seconde de A3.

Enfin, les dimensions de la **série C** sont les moyennes géométriques des dimensions respectives des séries A et B. Elle constitue une série intermédiaire. Elle sert notamment pour les enveloppes.
Par exemple C0 a pour dimensions :

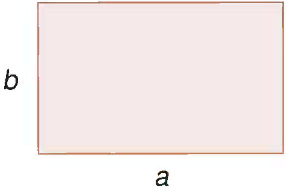
$$\sqrt{841 \cdot 1000} = 917 \text{ mm} \quad \text{et} \quad \sqrt{1189 \cdot 1414} = 1297 \text{ mm}.$$

Le nombre d'or

Le nombre d'or

C'est le rapport des côtés d'un **rectangle d'or** :

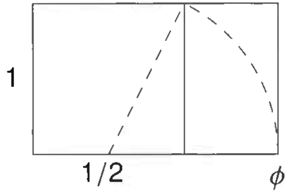
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} =: \phi$$



On démontre que ce rapport vaut

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Voici une construction simple d'un rectangle d'or :



On trouve des rectangles d'or dans de nombreuses constructions architecturales et dans de nombreuses œuvres d'art.

On trouve des rectangles d'or dans de nombreuses constructions architecturales et dans de nombreuses œuvres d'art.

Léonard de Vinci l'a abondamment utilisé, en particulier pour représenter *l'Homme de Vitruve* (architecte de Jules César).

Inséré dans un carré et un cercle, il montre les proportions idéales du corps humain.

Inséré dans un carré et un cercle, il montre les proportions idéales du corps humain.

Le rapport entre le côté du carré et le rayon du cercle est égal à ϕ.

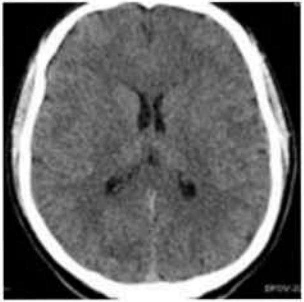
Inséré dans un carré et un cercle, il montre les proportions idéales du corps humain.

Le rapport entre le côté du carré et le rayon du cercle est égal à ϕ.

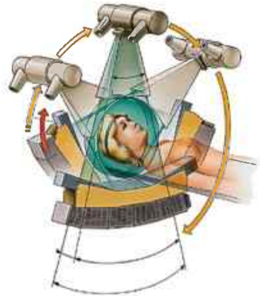
C'est également le format des cartes de crédit et, approximativement, le format 16/9 !

Le scanner médical

L'appareil permet d'obtenir des images **en coupe** du cours humain, contrairement à la radiographie.



Principe de fonctionnement



Un mince faisceau de rayons X d'intensité donnée I est produit par un émetteur qui est animé de deux mouvements de rotation :

- Une rotation circulaire dans l'anneau
- Pour chaque position dans l'anneau, un balayage d'une certaine amplitude.

Pour chaque position, un récepteur situé en face mesure l'intensité I' du faisceau après qu'il ait traversé la "matière". Cette dernière intensité dépend de la densité de la matière rencontrée sur son passage.

Ainsi, les données récoltées sont une **liste de valeurs** d'intensité, dépendant de la position de l'émetteur.

On **reconstruit** alors l'image grâce à un théorème démontré en 1917 par le mathématicien autrichien Johann Radon (1887-1956) : les intensités récoltées en fonction de la position de l'émetteur sont transformées en une fonction qui donne la densité de la matière en coupe.

Merci !