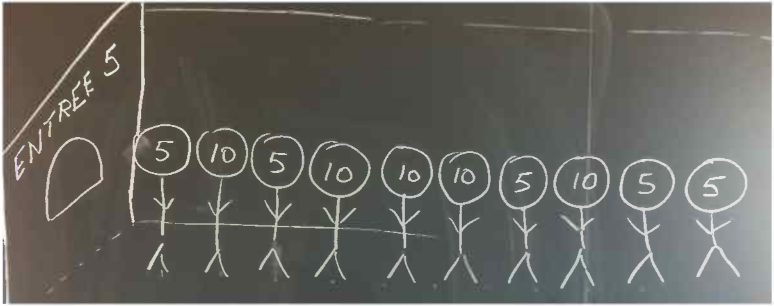
Le triangle de Pascal

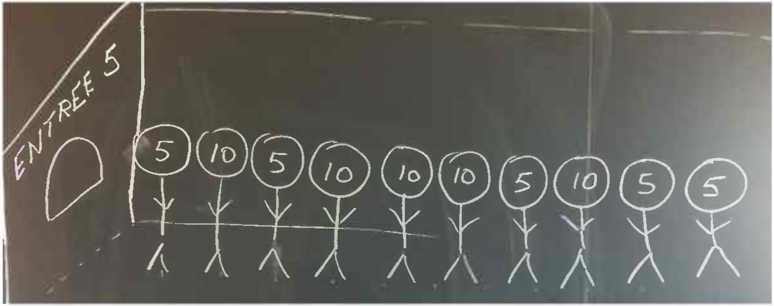
Cours U3A, Neuchâtel, 16 janvier 2015

François Sigrist

- File d'attente au théâtre

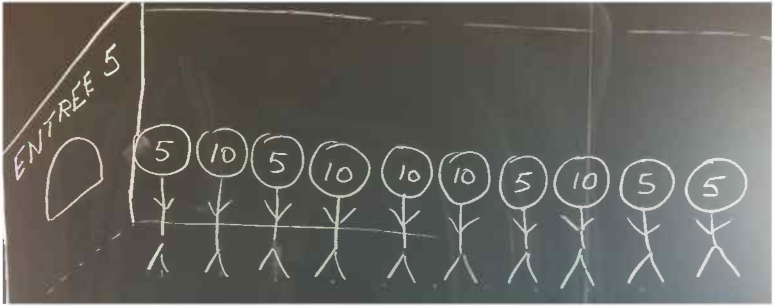


- File d'attente au théâtre



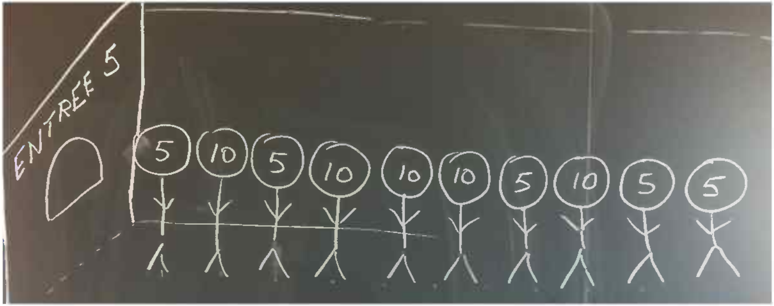
- Résultat final : 5 billets de 10 dans la caisse. Mais...

- File d'attente au théâtre



- Résultat final : 5 billets de 10 dans la caisse. Mais...
- Avec cette file d'attente, la caisse ne pourra pas rendre la monnaie, si elle n'a pas de pièces de 5 en réserve.

- File d'attente au théâtre

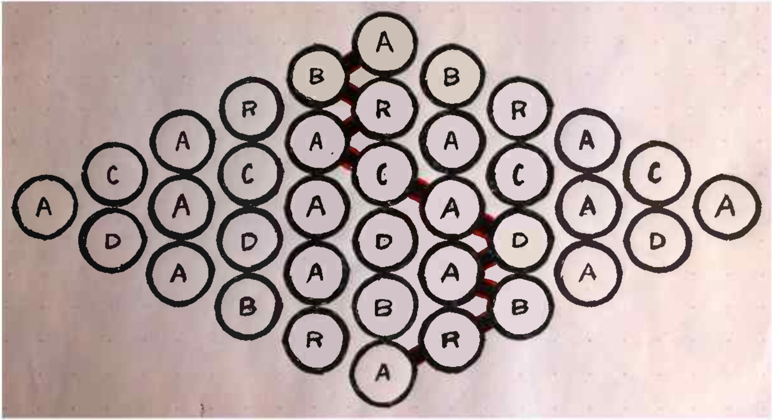


- Résultat final : 5 billets de 10 dans la caisse. Mais...
- Avec cette file d'attente, la caisse ne pourra pas rendre la monnaie, si elle n'a pas de pièces de 5 en réserve.
- On voit facilement que deux pièces de 5 suffisent.

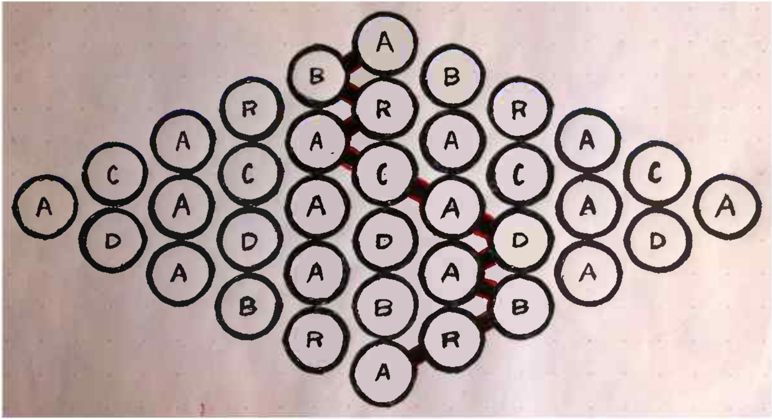
- Nous allons répondre à la question : Parmi toutes les files d'attente possibles, combien y en a-t-il qui ne nécessitent pas de monnaie dans la caisse ?

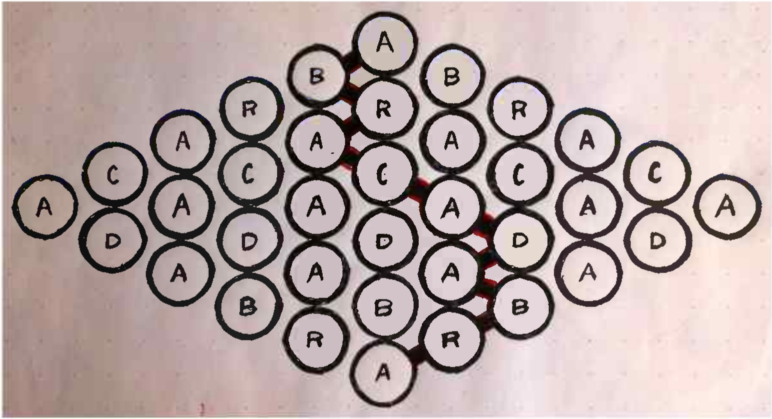
- Nous allons répondre à la question : Parmi toutes les files d'attente possibles, combien y en a-t-il qui ne nécessitent pas de monnaie dans la caisse ?
- Tout d'abord, combien y a-t-il de files d'attente possibles ?

- Nous allons répondre à la question : Parmi toutes les files d'attente possibles, combien y en a-t-il qui ne nécessitent pas de monnaie dans la caisse ?
- Tout d'abord, combien y a-t-il de files d'attente possibles ?
- Ce problème a été abordé il y a bien des années par Georges Pólya, un très célèbre mathématicien hongrois. Voici comment.

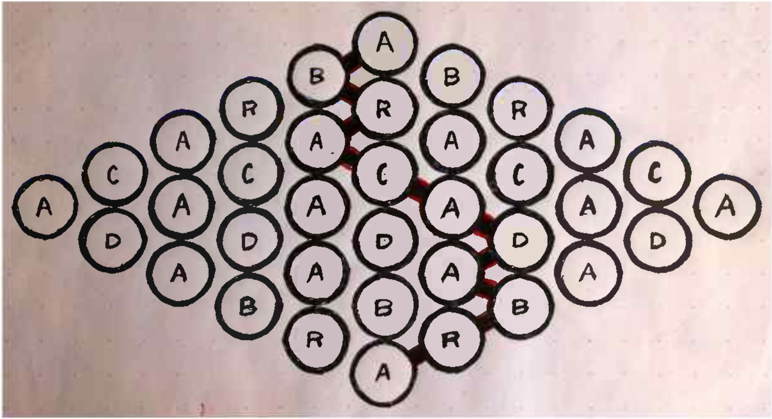


- De combien de façons peut-on lire ABRACADABRA de haut en bas ?

- 
A
C D
A A A
R C D B
B A A A A R
A R C D B A
B A A A R
R C D B
A A A
C D
A

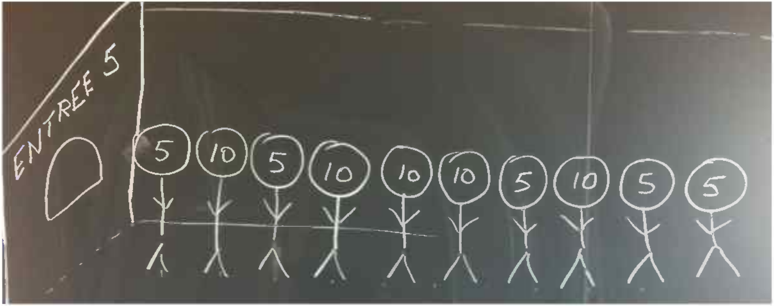
- 

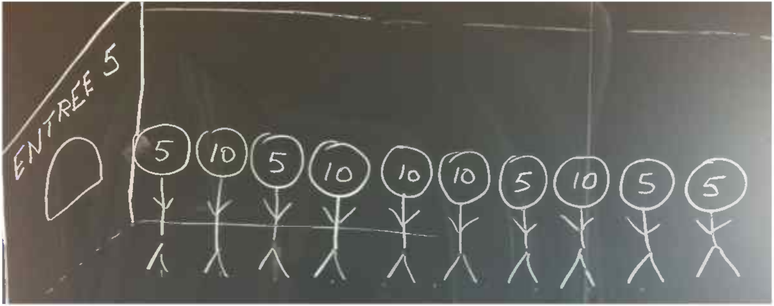
- On peut décrire le chemin ci-dessus par les lettres G/D/G/D/D/D/G/D/G/G, ou encore ABABBBABAA.

- 

- On peut décrire le chemin ci-dessus par les lettres G/D/G/D/D/D/G/D/G/G, ou encore ABABBBABAA.
- Nous devons donc compter combien il y a de mots différents contenant *5 lettres A et 5 lettres B.*

- On remarque aussi, en écrivant 5/10/5/10/10/10/5/10/5/5, que l'on compte aussi les files d'attente à la caisse du théâtre !

- On remarque aussi, en écrivant 5/10/5/10/10/10/5/10/5/5, que l'on compte aussi les files d'attente à la caisse du théâtre !
- 

- On remarque aussi, en écrivant 5/10/5/10/10/10/5/10/5/5, que l'on compte aussi les files d'attente à la caisse du théâtre !
- 

- Le nombre cherché s'appelle un *coefficient binomial* , et dans notre cas, il est noté $\binom{10}{5}$ (mots de longueur 10 en A et B, avec 5 lettres B).

- Illustrons ceci avec la formule que chacun connaît :

- Illustrons ceci avec la formule que chacun connaît :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

- Illustrons ceci avec la formule que chacun connaît :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$aa + ab + ba + bb =$$

- Illustrons ceci avec la formule que chacun connaît :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$aa + ab + ba + bb =$$

$$a^2 + 2ab + b^2 =$$

- Illustrons ceci avec la formule que chacun connaît :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$aa + ab + ba + bb =$$

$$a^2 + 2ab + b^2 =$$

$$\left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right) a^2 + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) ab + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) b^2$$

- Illustrons ceci avec la formule que chacun connaît :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$aa + ab + ba + bb =$$

$$a^2 + 2ab + b^2 =$$

$$\left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}\right) a^2 + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right) ab + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array}\right) b^2$$

- Illustrons ceci avec la formule que chacun connaît :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$aa + ab + ba + bb =$$

$$a^2 + 2ab + b^2 =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} a^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ab + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} b^2$$

-

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

- Illustrons ceci avec la formule que chacun connaît :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$aa + ab + ba + bb =$$

$$a^2 + 2ab + b^2 =$$

$$\binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

-

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

$$aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb =$$

- Illustrons ceci avec la formule que chacun connaît :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$aa + ab + ba + bb =$$

$$a^2 + 2ab + b^2 =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} a^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ab + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} b^2$$

-

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

$$aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb =$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$$

- Illustrons ceci avec la formule que chacun connaît :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$aa + ab + ba + bb =$$

$$a^2 + 2ab + b^2 =$$

$$\binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

-

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

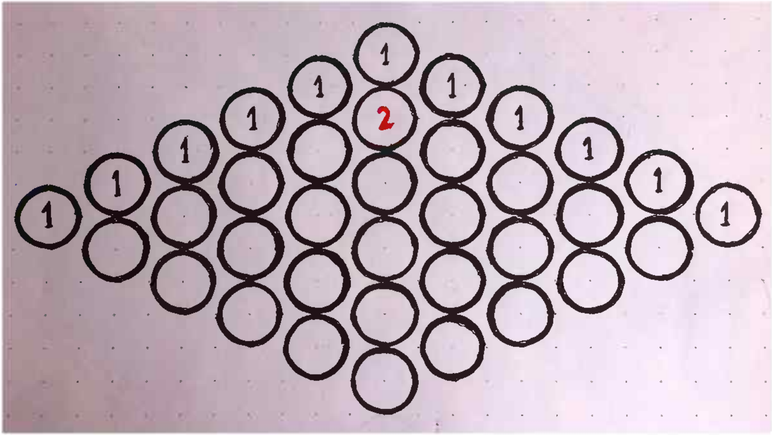
$$aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb =$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$$

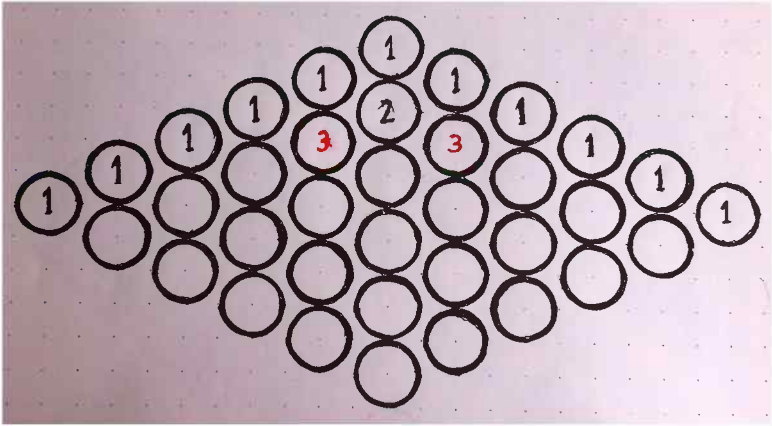
$$\binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3$$

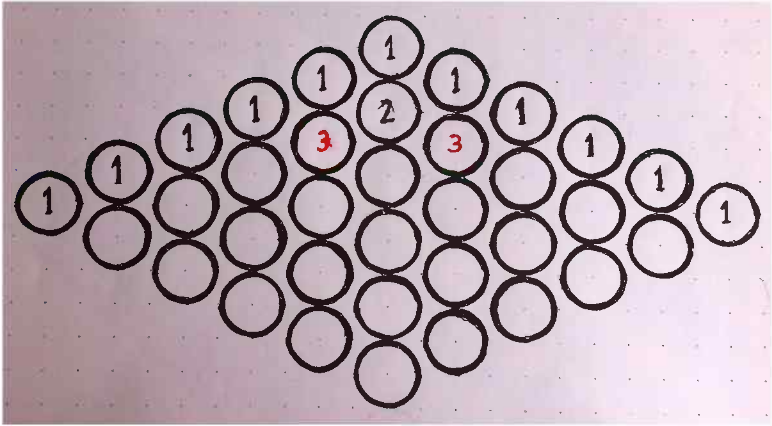
- Pour compter les façons d'écrire ABRACADABRA, ou les files d'attente, nous allons partir du haut, et compter combien de chemins mènent à chaque case du tableau.

- Pour compter les façons d'écrire ABRACADABRA, ou les files d'attente, nous allons partir du haut, et compter combien de chemins mènent à chaque case du tableau.
- Le début est assez facile, le voici.

- Pour compter les façons d'écrire ABRACADABRA, ou les files d'attente, nous allons partir du haut, et compter combien de chemins mènent à chaque case du tableau.
- Le début est assez facile, le voici.
- 

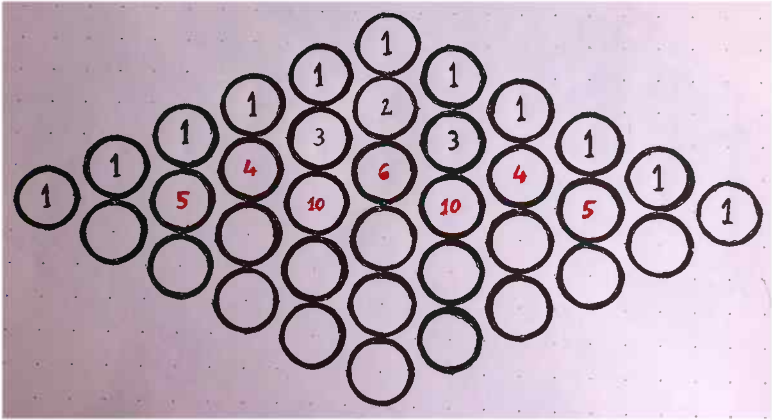
- Lorsqu'on a compris le 2 on peut passer à la ligne suivante.

- Lorsqu'on a compris le 2 on peut passer à la ligne suivante.
- 

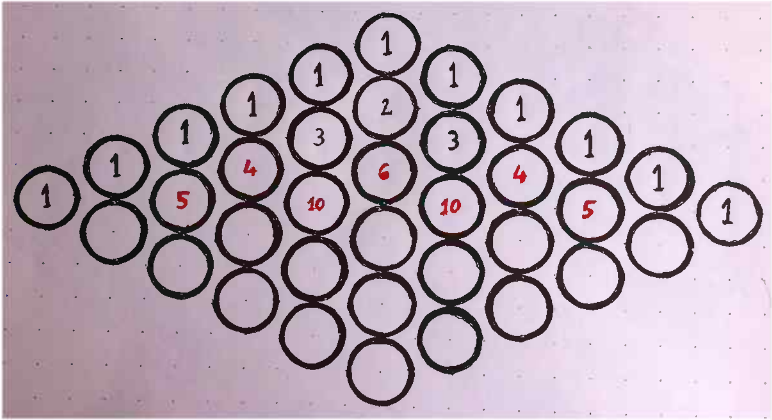
- Lorsqu'on a compris le 2 on peut passer à la ligne suivante.
- 

- Le nombre d'une case s'obtient en additionnant les deux nombres situés au-dessus de lui !

- La suite n'est que routine, mais suivons Pólya qui s'arrête au milieu du tableau.

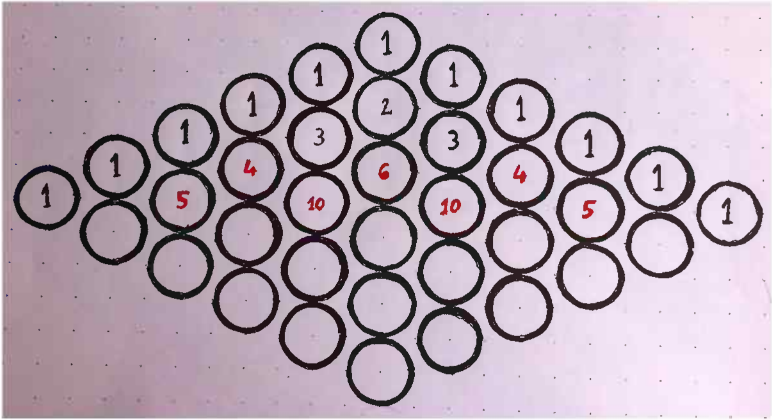


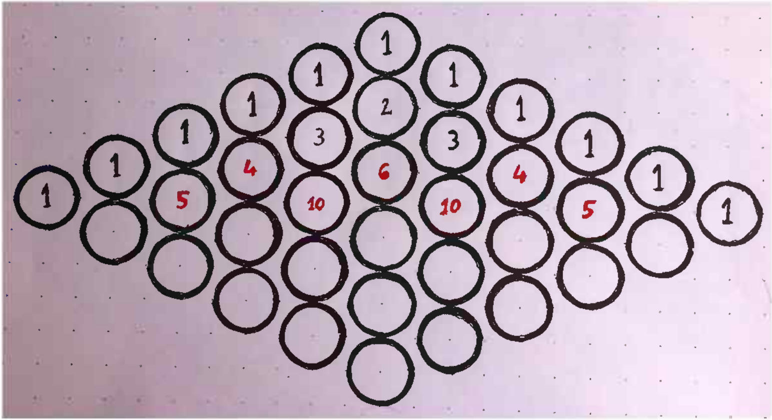
- La suite n'est que routine, mais suivons Pólya qui s'arrête au milieu du tableau.



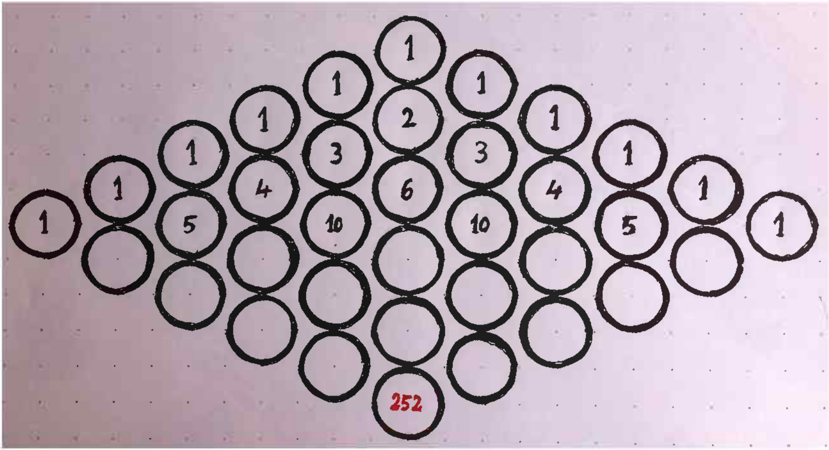
- Il veut en effet arriver le plus vite possible au résultat. Voici comment :

- On remarque que ce tableau a un axe de symétrie horizontal. Il y a autant de chemins allant du haut jusqu'à une case du milieu, qu'il y en a de cette case jusqu'en bas !

- On remarque que ce tableau a un axe de symétrie horizontal. Il y a autant de chemins allant du haut jusqu'à une case du milieu, qu'il y en a de cette case jusqu'en bas !
- 

- On remarque que ce tableau a un axe de symétrie horizontal. Il y a autant de chemins allant du haut jusqu'à une case du milieu, qu'il y en a de cette case jusqu'en bas !
- 

- Pólya calcule donc
$1 \times 1 + 5 \times 5 + 10 \times 10 + 10 \times 10 + 5 \times 5 + 1 \times 1 = 252$
et obtient le résultat sans avoir rempli le tableau.



$$1 \times 1 + 5 \times 5 + 10 \times 10 + 10 \times 10 + 5 \times 5 + 1 \times 1 = 252$$

- Il y a donc **252** :

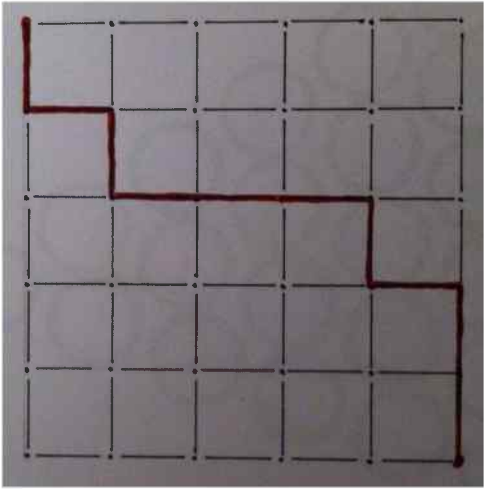
- Il y a donc **252** :
- files d'attente avec 5 pièces de 5 et 5 billets de 10.

- Il y a donc **252** :
- files d'attente avec 5 pièces de 5 et 5 billets de 10.
- mots différents comprenant 5 lettres A et 5 lettres B.

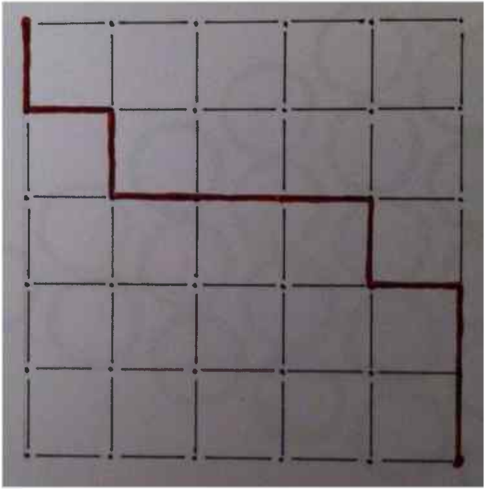
- Il y a donc **252** :
- files d'attente avec 5 pièces de 5 et 5 billets de 10.
- mots différents comprenant 5 lettres A et 5 lettres B.
- façons de jouer à pile ou face 10 fois en obtenant 5 fois pile et 5 fois face.

- Il y a donc **252** :
- files d'attente avec 5 pièces de 5 et 5 billets de 10.
- mots différents comprenant 5 lettres A et 5 lettres B.
- façons de jouer à pile ou face 10 fois en obtenant 5 fois pile et 5 fois face.
- façons de jouer à la roulette en obtenant 5 fois rouge et 5 fois noir.

- Il y a donc **252** :
- files d'attente avec 5 pièces de 5 et 5 billets de 10.
- mots différents comprenant 5 lettres A et 5 lettres B.
- façons de jouer à pile ou face 10 fois en obtenant 5 fois pile et 5 fois face.
- façons de jouer à la roulette en obtenant 5 fois rouge et 5 fois noir.
- Ajoutons un autre point de vue, celui de la *distance taxi*.

- 

  Dans une ville comme New York, ou une autre plus proche de nous, imaginons un carré de rues 5×5. Un taxi devant se rendre du coin supérieur gauche au coin inférieur droit a **252** possibilités de trajets de longueur 10.

- 
  Dans une ville comme New York, ou une autre plus proche de nous, imaginons un carré de rues 5×5. Un taxi devant se rendre du coin supérieur gauche au coin inférieur droit a **252** possibilités de trajets de longueur 10.
- Le trajet indiqué est celui de notre file d'attente de départ.

- Selon le problème posé, le choix du point de vue peut grandement faciliter le raisonnement. Un joli exemple : Peut-on faire la liste des 252 possibilités ? Quel est le moyen le plus adéquat ?

- Selon le problème posé, le choix du point de vue peut grandement faciliter le raisonnement. Un joli exemple : Peut-on faire la liste des 252 possibilités ? Quel est le moyen le plus adéquat ?
- La réponse est donnée par les mots de longueur 10 comprenant 5 lettres A et 5 lettres B, qu'il suffit de mettre dans l'ordre alphabétique, en d'autres termes faire le *dictionnaire* des files d'attente.

- Selon le problème posé, le choix du point de vue peut grandement faciliter le raisonnement. Un joli exemple : Peut-on faire la liste des 252 possibilités ? Quel est le moyen le plus adéquat ?
- La réponse est donnée par les mots de longueur 10 comprenant 5 lettres A et 5 lettres B, qu'il suffit de mettre dans l'ordre alphabétique, en d'autres termes faire le *dictionnaire* des files d'attente.
- Parenthèse : c'est plus difficile qu'il n'y paraît. Les informaticiens que j'ai consultés, à l'occasion d'un problème de taille énorme, ont pu sans grande difficulté "cracher" la liste de toutes les possibilités, mais n'ont jamais pu me produire la 240-ième file d'attente sans commencer au début.

- Selon le problème posé, le choix du point de vue peut grandement faciliter le raisonnement. Un joli exemple : Peut-on faire la liste des 252 possibilités ? Quel est le moyen le plus adéquat ?
- La réponse est donnée par les mots de longueur 10 comprenant 5 lettres A et 5 lettres B, qu'il suffit de mettre dans l'ordre alphabétique, en d'autres termes faire le *dictionnaire* des files d'attente.
- Parenthèse : c'est plus difficile qu'il n'y paraît. Les informaticiens que j'ai consultés, à l'occasion d'un problème de taille énorme, ont pu sans grande difficulté "cracher" la liste de toutes les possibilités, mais n'ont jamais pu me produire la 240-ième file d'attente sans commencer au début.
- Je persiste à penser que c'est possible, mais je n'ai jamais trouvé le temps, ni l'énergie pour le faire.

- Si l'on prend le point de vue de pile ou face, le problème posé perd de son intérêt : personne ne peut prédire qu'en jouant à pile ou face 10 fois, il va sortir 5 fois pile et 5 fois face. Il vaut donc mieux envisager tous les cas possibles.

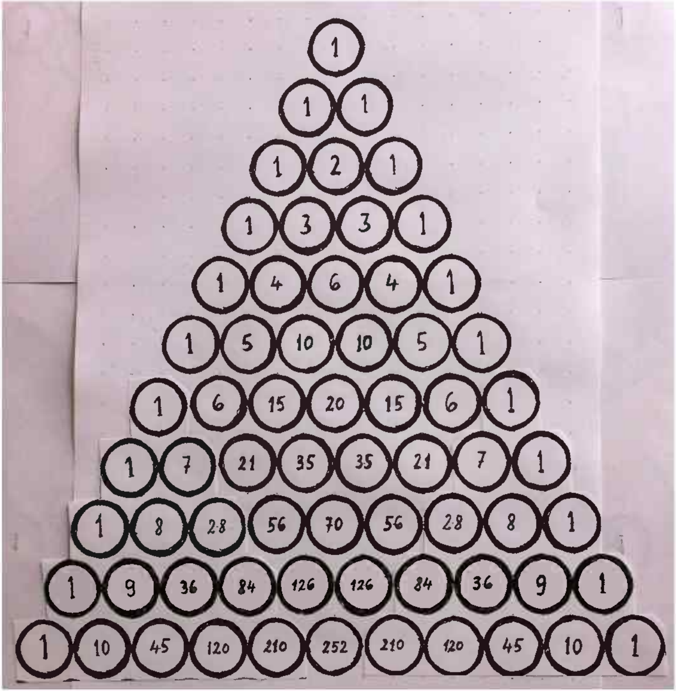
- Si l'on prend le point de vue de pile ou face, le problème posé perd de son intérêt : personne ne peut prédire qu'en jouant à pile ou face 10 fois, il va sortir 5 fois pile et 5 fois face. Il vaut donc mieux envisager tous les cas possibles.
- Le tableau se remplit alors en triangle, c'est le célèbre

Triangle de Pascal

- Si l'on prend le point de vue de pile ou face, le problème posé perd de son intérêt : personne ne peut prédire qu'en jouant à pile ou face 10 fois, il va sortir 5 fois pile et 5 fois face. Il vaut donc mieux envisager tous les cas possibles.
- Le tableau se remplit alors en triangle, c'est le célèbre

Triangle de Pascal

- En voici donc les 10 premières lignes.


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

- La planche de Galton est une bonne illustration du triangle de Pascal. Son seul défaut est ici de ne pas avoir assez de billes pour constater la similitude.

- La planche de Galton est une bonne illustration du triangle de Pascal. Son seul défaut est ici de ne pas avoir assez de billes pour constater la similitude.
- La dixième ligne du triangle de Pascal

$$1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1$$

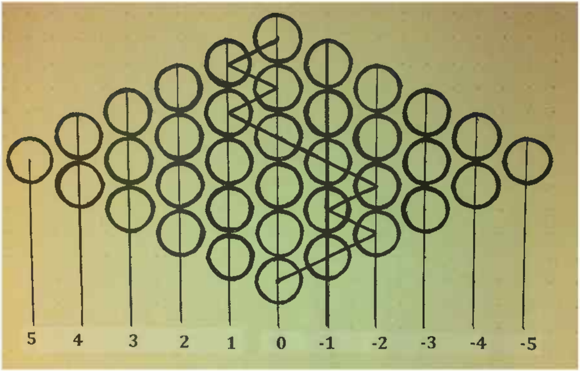
  a pour total 1024, il faudrait déjà au moins 1024 billes pour faire *une seule* simulation.

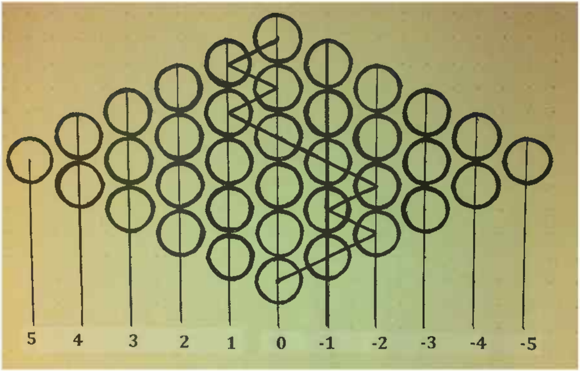
- La planche de Galton est une bonne illustration du triangle de Pascal. Son seul défaut est ici de ne pas avoir assez de billes pour constater la similitude.
- La dixième ligne du triangle de Pascal

  $$1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1$$

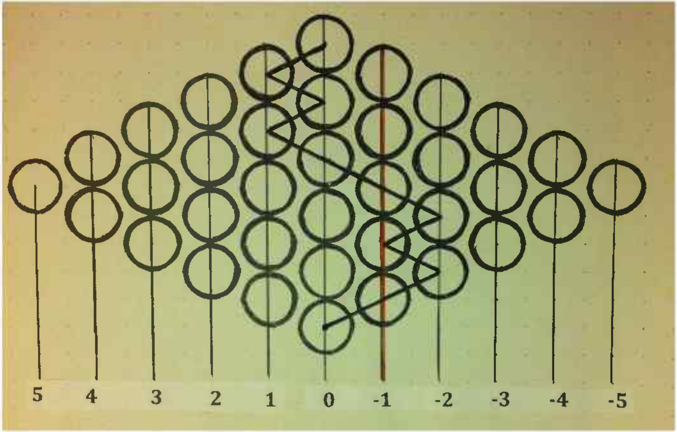
  a pour total 1024, il faudrait déjà au moins 1024 billes pour faire *une seule* simulation.
- Nous verrons plus loin comment les lois du hasard sont l'émanation directe du triangle de Pascal.

- Il nous faut maintenant compter les files d'attente *favorables*, dans l'hypothèse que la caisse du théâtre n'a pas de pièces de 5 en réserve. Pour cela voici l'image pertinente, qui donne le contenu de la caisse (nombre de pièces de 5 dans la caisse).

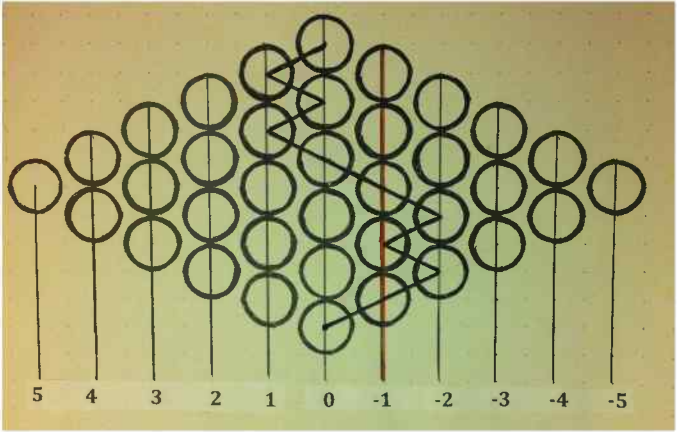
- Il nous faut maintenant compter les files d'attente *favorables*, dans l'hypothèse que la caisse du théâtre n'a pas de pièces de 5 en réserve. Pour cela voici l'image pertinente, qui donne le contenu de la caisse (nombre de pièces de 5 dans la caisse).
- 

- Il nous faut maintenant compter les files d'attente *favorables*, dans l'hypothèse que la caisse du théâtre n'a pas de pièces de 5 en réserve. Pour cela voici l'image pertinente, qui donne le contenu de la caisse (nombre de pièces de 5 dans la caisse).
- 

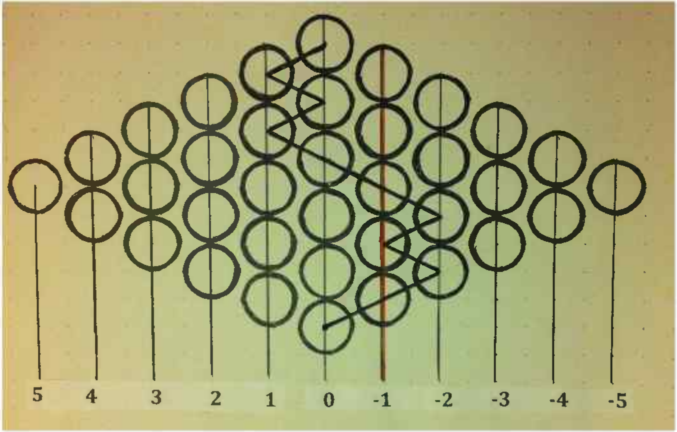
- La file d'attente de départ va jusqu'à -2, c'est ce que nous avons observé tout au début, il manque deux pièces de 5.



- La ligne rouge est celle qu'il ne faut pas toucher, puisqu'elle est à la colonne -1.



- La ligne rouge est celle qu'il ne faut pas toucher, puisqu'elle est à la colonne -1.
- Nous pouvons donc caractériser les files d'attente *défavorables* : ce sont celles qui touchent la colonne -1 (la ligne rouge).

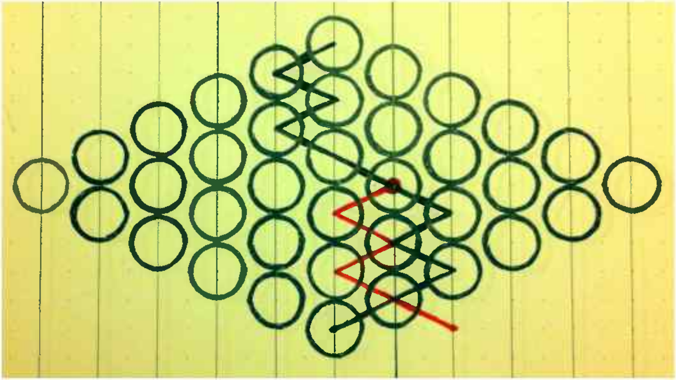


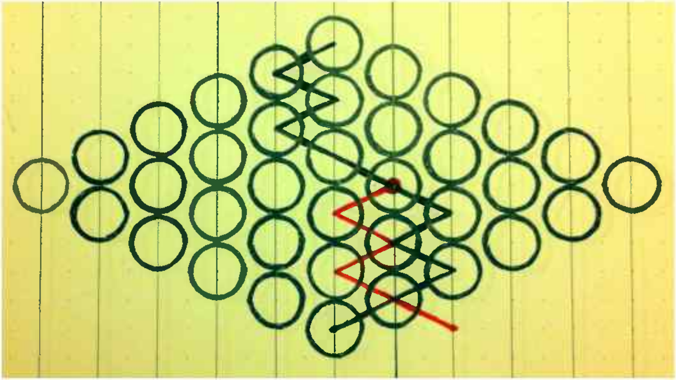
- La ligne rouge est celle qu'il ne faut pas toucher, puisqu'elle est à la colonne -1.
- Nous pouvons donc caractériser les files d'attente *défavorables* : ce sont celles qui touchent la colonne -1 (la ligne rouge).
- C'est ce que nous allons compter maintenant.

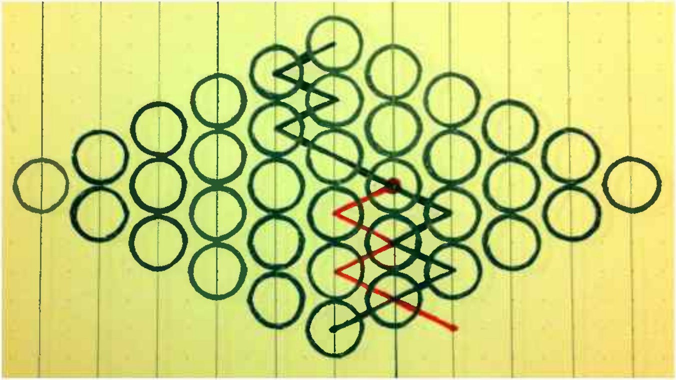
- Il s'agit d'une des plus extraordinaires astuces de l'analyse combinatoire, dont je n'ai découvert l'historique que très récemment, alors que le problème de la caisse du théâtre m'a été raconté dans les couloirs du Poly par le mathématicien Henri Carnal.

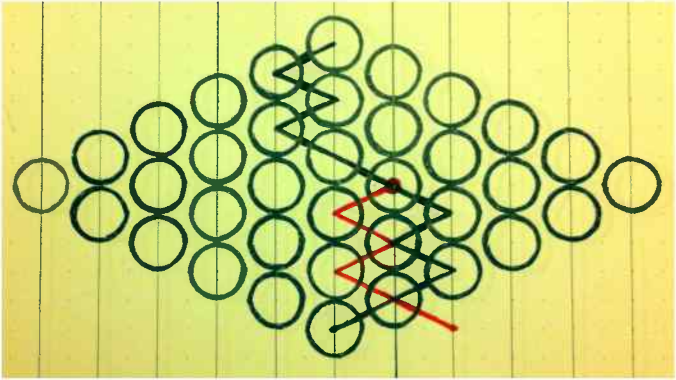
- Il s'agit d'une des plus extraordinaires astuces de l'analyse combinatoire, dont je n'ai découvert l'historique que très récemment, alors que le problème de la caisse du théâtre m'a été raconté dans les couloirs du Poly par le mathématicien Henri Carnal.
- Cette histoire remonte au 19-ième siècle, avec le mathématicien français Désiré André (1840-1917). Il s'agit du *problème du scrutin* : Dans une élection opposant A à B, A a été élu avec a voix, alors que B n'a recueilli que b voix ($a > b$). Il n'y a qu'une seule urne. Quelle est la probabilité qu'au cours du dépouillement des voix, A soit constamment en avance sur B ?

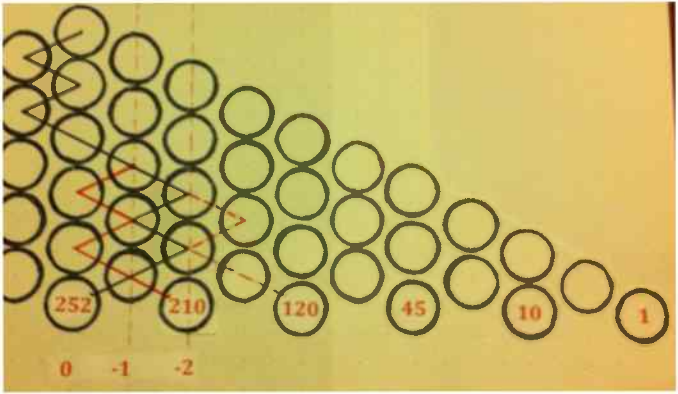
- Revenons à notre problème, et aux files d'attente défavorables.

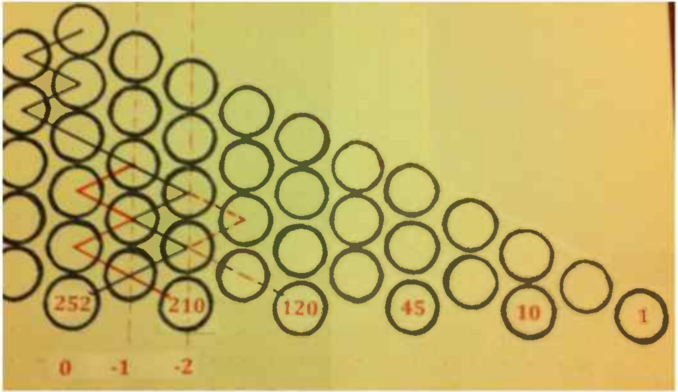
- Revenons à notre problème, et aux files d'attente défavorables.
- 

- Revenons à notre problème, et aux files d'attente défavorables.
- 
- Au premier contact de notre file d'attente défavorable, symétrisons la file d'attente par rapport à la ligne interdite, comme indiqué.

- Revenons à notre problème, et aux files d'attente défavorables.
- 
- Au premier contact de notre file d'attente défavorable, symétrisons la file d'attente par rapport à la ligne interdite, comme indiqué.
- Nous obtenons un nouveau trajet , qui se termine en un point du triangle de Pascal situé plus à droite.

- Revenons à notre problème, et aux files d'attente défavorables.
- 
- Au premier contact de notre file d'attente défavorable, symétrisons la file d'attente par rapport à la ligne interdite, comme indiqué.
- Nous obtenons un nouveau trajet , qui se termine en un point du triangle de Pascal situé plus à droite.
- Il y a presque évidemment


252
210
120
45
10
1
0
-1
-2

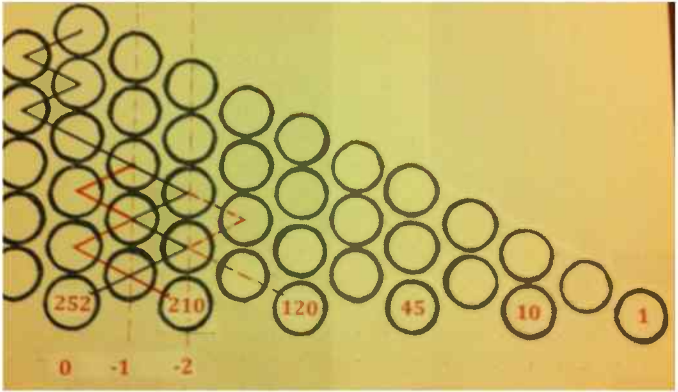
- 

- 210 files d'attente défavorables.

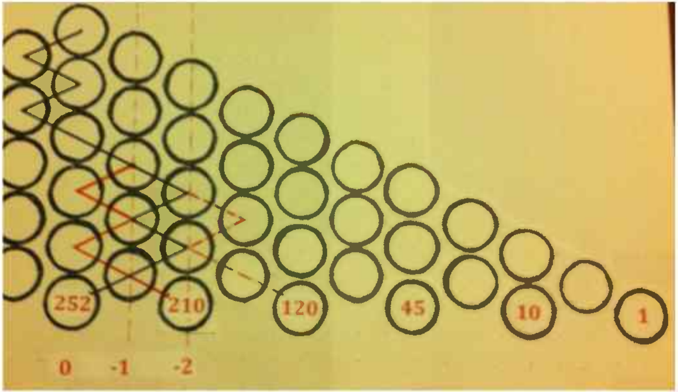
- Nous pouvons maintenant calculer le taux de réussite pour une caisse du théâtre sans monnaie.

- Nous pouvons maintenant calculer le taux de réussite pour une caisse du théâtre sans monnaie.
- Il y a $252 - 210 = 42$ files d'attente favorables.
  Le taux de réussite est donc égal à $\frac{42}{252} = \frac{1}{6}$

- Nous pouvons maintenant calculer le taux de réussite pour une caisse du théâtre sans monnaie.
- Il y a $252 - 210 = 42$ files d'attente favorables.
  Le taux de réussite est donc égal à $\frac{42}{252} = \frac{1}{6}$
- Le calcul général ($2n$ personnes, n pièces de 5 et n billets de 10)
  donne le taux de réussite de $\frac{1}{n+1}$, qui devient donc négligeable lorsque n est grand.

- 

  Supposons maintenant qu'il y a au départ *une* pièce de 5 dans la caisse. Notre file d'attente ne peut toujours pas passer, puisqu'elle touche la verticale -2.

- 

  Supposons maintenant qu'il y a au départ *une* pièce de 5 dans la caisse. Notre file d'attente ne peut toujours pas passer, puisqu'elle touche la verticale -2.
- Nous sommes donc en présence d'une file défavorable malgré la présence d'une pièce de 5. La même opération de symétrisation montre qu'il y a, en présence d'une pièce de 5, 120 files défavorables, moins de la moitié !

- Le triangle de Pascal contient donc toute l'information nécessaire pour traiter complètement le problème de la caisse du théâtre.

- Le triangle de Pascal contient donc toute l'information nécessaire pour traiter complètement le problème de la caisse du théâtre.
- 10 personnes $(5+5)$, 252 files possibles

Pièces	0	1	2	3	4	5
Défavorables	210	120	45	10	1	0
Favorables	42	132	207	242	251	252
Rapport	1/6	11/21	23/28	121/126	251/252	1
Pourcentage	16.7	52.3	82.1	96.0	99.6	100

- Le triangle de Pascal contient donc toute l'information nécessaire pour traiter complètement le problème de la caisse du théâtre.
- 10 personnes $(5 + 5)$, 252 files possibles

Pièces	0	1	2	3	4	5
Défavorables	210	120	45	10	1	0
Favorables	42	132	207	242	251	252
Rapport	1/6	11/21	23/28	121/126	251/252	1
Pourcentage	16.7	52.3	82.1	96.0	99.6	100

- La leçon de cette démonstration peut donc se résumer ainsi :

- Le triangle de Pascal contient donc toute l'information nécessaire pour traiter complètement le problème de la caisse du théâtre.
- 10 personnes $(5+5)$, 252 files possibles

Pièces	0	1	2	3	4	5
Défavorables	210	120	45	10	1	0
Favorables	42	132	207	242	251	252
Rapport	1/6	11/21	23/28	121/126	251/252	1
Pourcentage	16.7	52.3	82.1	96.0	99.6	100

- La leçon de cette démonstration peut donc se résumer ainsi :
- Il *faut* mettre des pièces dans la caisse, mais

- Le triangle de Pascal contient donc toute l'information nécessaire pour traiter complètement le problème de la caisse du théâtre.
- 10 personnes $(5+5)$, 252 files possibles

Pièces	0	1	2	3	4	5
Défavorables	210	120	45	10	1	0
Favorables	42	132	207	242	251	252
Rapport	1/6	11/21	23/28	121/126	251/252	1
Pourcentage	16.7	52.3	82.1	96.0	99.6	100

- La leçon de cette démonstration peut donc se résumer ainsi :
- Il *faut* mettre des pièces dans la caisse, mais
- Il *suffit* d'en mettre peu.

- Pour bien se convaincre de la pertinence de ces maximes, voici le calcul pour une file d'attente de 50 personnes (25 pièces de 5 et 25 billets de 10) :

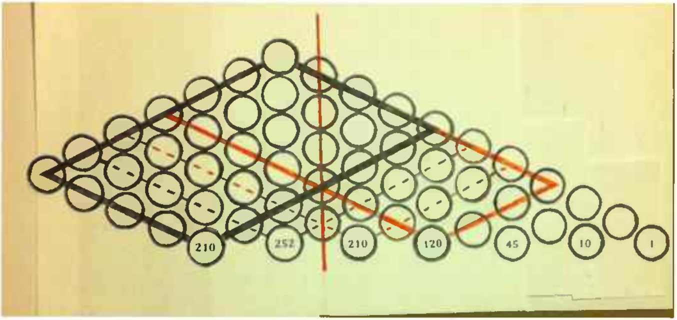
- Pour bien se convaincre de la pertinence de ces maximes, voici le calcul pour une file d'attente de 50 personnes (25 pièces de 5 et 25 billets de 10) :
- 50 personnes $(25 + 25)$, 126410606437752 files possibles

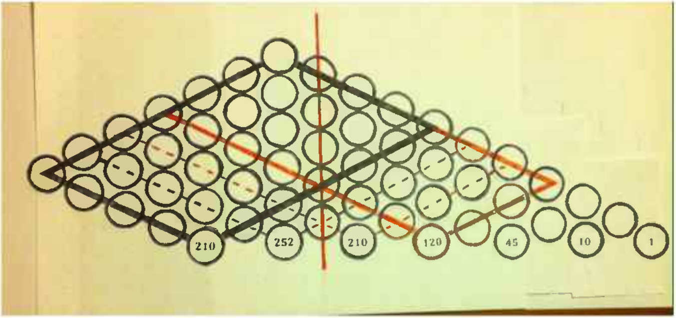
Pièces	0	1	5	8	12	25
Pourcentage	3.8	14.5	75.9	96.1	99.9	100

- Pour bien se convaincre de la pertinence de ces maximes, voici le calcul pour une file d'attente de 50 personnes (25 pièces de 5 et 25 billets de 10) :
- 50 personnes $(25 + 25)$, 126410606437752 files possibles

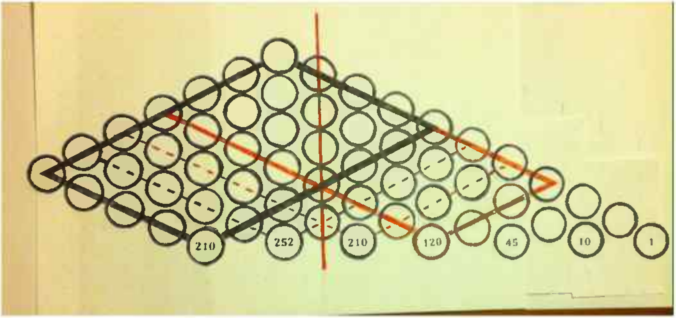
Pièces	0	1	5	8	12	25
Pourcentage	3.8	14.5	75.9	96.1	99.9	100

- Pour avoir une flexibilité complète, il reste à envisager les files d'attente générales. A titre d'exercice, résolvons par exemple le problème d'une file d'attente avec 6 pièces de 5 et 4 billets de 10.


210
252
210
120
45
10
1

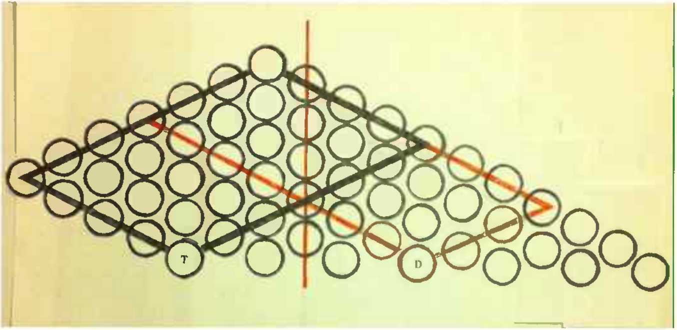
- 

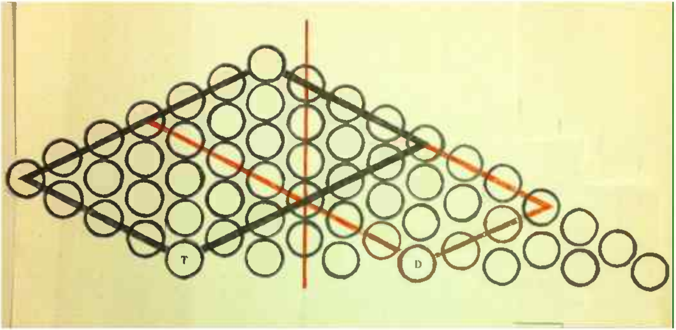
- Le principe est évidemment le même, ce sont les files d'attente défavorables qui apparaissent dans le triangle de Pascal

- 

- Le principe est évidemment le même, ce sont les files d'attente défavorables qui apparaissent dans le triangle de Pascal
- On obtient donc ici 10 personnes $(6+4)$, 210 files possibles

Pièces	0	1	2	3	4
Défavorables	120	45	10	1	0
Favorables	90	165	200	209	210
Rapport	3/7	11/14	20/21	209/210	1
Pourcentage	42.8	78.6	95.2	99.5	100


T
D

- 

- Voici la recette générale pour le traitement des files d'attente. On suppose que la file contient m pièces de 5, et n billets de 10. La construction de symétrisation fournit le parallélogramme rouge dont les dimensions sont $n-1$ et $m+1$. Il y a en tout $T = \begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix}$ files d'attente, et $D = \begin{pmatrix} m+n \\ m+1 \end{pmatrix}$ files d'attente défavorables.

- Le calcul du rendement $R = (T - D)/T$ donne $R = \frac{m-n+1}{m+1}$

- Le calcul du rendement $R = (T - D)/T$ donne $R = \frac{m-n+1}{m+1}$
- Notre premier exemple $m = 5, n = 5$ confirme $R = \frac{1}{6}$

- Le calcul du rendement $R = (T - D)/T$ donne $R = \frac{m-n+1}{m+1}$
- Notre premier exemple $m = 5, n = 5$ confirme $R = \frac{1}{6}$
- Avec 50 personnes ($m = 25, n = 25$) on obtient $R = \frac{1}{26}$

- Le calcul du rendement $R = (T - D)/T$ donne $R = \frac{m-n+1}{m+1}$
- Notre premier exemple $m = 5, n = 5$ confirme $R = \frac{1}{6}$
- Avec 50 personnes ($m = 25, n = 25$) on obtient $R = \frac{1}{26}$
- Finalement, avec $m = 6$, $n = 4$, on retrouve $R = \frac{3}{7}$

Revenons au triangle de Pascal. Il est en effet possible de donner une formule qui évite de remplir le triangle, comme nous l'avons fait auparavant. Quelques exemples pour l'illustrer :

- $$\left(\begin{array}{c} 10 \\ 4 \end{array} \right) = \frac{\mathbf{10} \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times \mathbf{4}} = \mathbf{210}$$

Revenons au triangle de Pascal. Il est en effet possible de donner une formule qui évite de remplir le triangle, comme nous l'avons fait auparavant. Quelques exemples pour l'illustrer :

- $$\binom{10}{4} = \frac{\mathbf{10} \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times \mathbf{4}} = \mathbf{210}$$

- $$\binom{10}{5} = \frac{\mathbf{10} \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \mathbf{5}} = \mathbf{252}$$

Revenons au triangle de Pascal. Il est en effet possible de donner une formule qui évite de remplir le triangle, comme nous l'avons fait auparavant. Quelques exemples pour l'illustrer :

- $$\binom{10}{4} = \frac{\mathbf{10} \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times \mathbf{4}} = \mathbf{210}$$
- $$\binom{10}{5} = \frac{\mathbf{10} \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \mathbf{5}} = \mathbf{252}$$
- Plutôt que de vous donner une preuve formelle, qui fait partie de vos souvenirs de lycée, je préfère vous donner deux échantillons qui font partie de la démonstration.

- $$\binom{10}{6} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \binom{10}{4}$$

  montre la symétrie du triangle de Pascal.

- $$\binom{10}{6} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \binom{10}{4}$$
  montre la symétrie du triangle de Pascal.
- $$\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} + \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} =$$
  $$\frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4}(4+6) = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \binom{10}{4}$$
  montre la loi de construction.

- Parlons des factorielles. On commence par $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $4! = 24$, ... , $7! = 5040$, etc..

- Parlons des factorielles. On commence par $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $4! = 24$, ... , $7! = 5040$, etc..
- La croissance de cette fonction est extraordinairement rapide. Par exemple, 450! est un nombre de 1001 chiffres, qui a reçu outre-Atlantique le sobriquet de "Arabian nights factorial".

- Parlons des factorielles. On commence par $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $4! = 24$, ... , $7! = 5040$, etc..
- La croissance de cette fonction est extraordinairement rapide. Par exemple, 450! est un nombre de 1001 chiffres, qui a reçu outre-Atlantique le sobriquet de "Arabian nights factorial".
- A propos de grands nombres, combien pensez-vous qu'il s'est écoulé de nanosecondes depuis le début de l'univers il y a (environ) 13 milliards d'années ?

- Parlons des factorielles. On commence par $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $4! = 24$, ... , $7! = 5040$, etc..
- La croissance de cette fonction est extraordinairement rapide. Par exemple, 450! est un nombre de 1001 chiffres, qui a reçu outre-Atlantique le sobriquet de "Arabian nights factorial".
- A propos de grands nombres, combien pensez-vous qu'il s'est écoulé de nanosecondes depuis le début de l'univers il y a (environ) 13 milliards d'années ?
- $13 \times 10^9 \times 365 \times 24 \times 3600 \times 10^9 =$ 409968000000000000000000000 nanosecondes (27 chiffres).

- Parlons des factorielles. On commence par $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $4! = 24$, ... , $7! = 5040$, etc..
- La croissance de cette fonction est extraordinairement rapide. Par exemple, 450! est un nombre de 1001 chiffres, qui a reçu outre-Atlantique le sobriquet de "Arabian nights factorial".
- A propos de grands nombres, combien pensez-vous qu'il s'est écoulé de nanosecondes depuis le début de l'univers il y a (environ) 13 milliards d'années ?
- $13 \times 10^9 \times 365 \times 24 \times 3600 \times 10^9 =$ 409968000000000000000000000 nanosecondes (27 chiffres).
- La fonction $n!$ compte les permutations de n objets, on s'en convainc très facilement par un raisonnement inductif. Si l'on ajoute un objet, il y a $n + 1$ façons de l'insérer dans une permutation, pour obtenir $n!(n + 1) = (n + 1)!$.

- Les éléments du triangle de Pascal peuvent s'écrire à l'aide des factorielles,
$$\begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix} = \frac{(m+n)!}{m! \times n!}$$

- Les éléments du triangle de Pascal peuvent s'écrire à l'aide des factorielles,
$$\begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix} = \frac{(m+n)!}{m! \times n!}$$
- La démonstration est assez facile, je préfère vous la donner sous forme d'anecdote. Lors d'un de mes premiers cours au Canada, j'avais expliqué que si l'on met les lettres de MISSISSIPI dans une urne, et qu'on les tire au hasard, il y a $\frac{10!}{1! \times 4! \times 4! \times 1!}$ mots mots différents possibles (1 lettre M, 4 lettres I, 4 lettres S, et 1 lettre P. Le raisonnement est facile.

- Les éléments du triangle de Pascal peuvent s'écrire à l'aide des factorielles,
$$\left(\begin{array}{c} m+n \\ n \end{array} \right) = \frac{(m+n)!}{m! \times n!}$$
- La démonstration est assez facile, je préfère vous la donner sous forme d'anecdote. Lors d'un de mes premiers cours au Canada, j'avais expliqué que si l'on met les lettres de MISSISSIPI dans une urne, et qu'on les tire au hasard, il y a $\frac{10!}{1! \times 4! \times 4! \times 1!}$ mots mots différents possibles (1 lettre M, 4 lettres I, 4 lettres S, et 1 lettre P. Le raisonnement est facile.
- Je ne savais pas que MISSISSIPPI s'écrit avec 2 lettres P, ce qui a créé l'hilarité générale chez mes étudiants. Je n'ai eu l'explication que plus tard.

- La formule donnée est impraticable en grande dimension. Mais l'observation du triangle de Pascal comme description de pile ou face montre le lien avec les lois du hasard.

- La formule donnée est impraticable en grande dimension. Mais l'observation du triangle de Pascal comme description de pile ou face montre le lien avec les lois du hasard.
- Le triangle de Pascal a un comportement très voisin de la célèbre *courbe de Gauss* e^{-x^2}.

- La formule donnée est impraticable en grande dimension. Mais l'observation du triangle de Pascal comme description de pile ou face montre le lien avec les lois du hasard.
- Le triangle de Pascal a un comportement très voisin de la célèbre *courbe de Gauss* e^{-x^2}.
- Une analyse plus précise donne l'approximation

$$\binom{10}{5 \pm k} \approx \frac{2^{10}}{\sqrt{5\pi}} e^{-\frac{k^2}{5}} = 258,36 e^{-\frac{k^2}{5}}$$

- La tabelle des valeurs

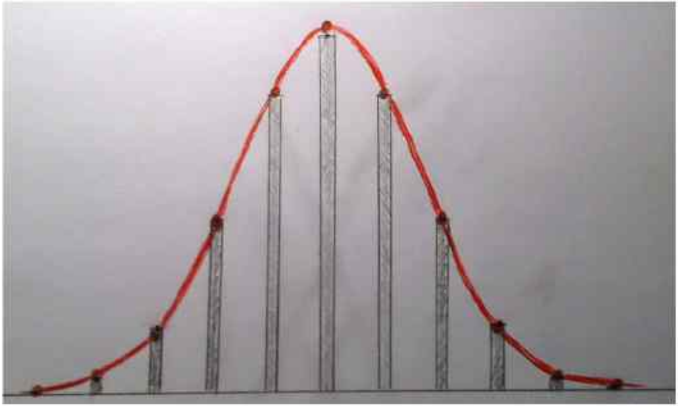
$\binom{10}{5}$	$\binom{10}{6}$	$\binom{10}{7}$	$\binom{10}{8}$	$\binom{10}{9}$	$\binom{10}{10}$
252	210	120	45	10	1
258.3	211.5	116.1	42.7	10.5	1.7

est illustrée par

- La tabelle des valeurs

$\binom{10}{5}$	$\binom{10}{6}$	$\binom{10}{7}$	$\binom{10}{8}$	$\binom{10}{9}$	$\binom{10}{10}$
252	210	120	45	10	1
258.3	211.5	116.1	42.7	10.5	1.7

est illustrée par



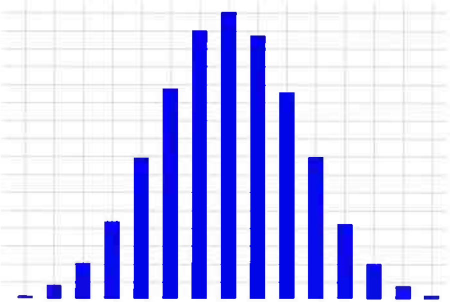
-

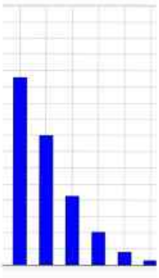
L'approximation par la courbe de Gauss est excellente. Elle est basée sur une extraordinaire formule dite *formule de Stirling*

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\ e^{\frac{1}{12n}}$$

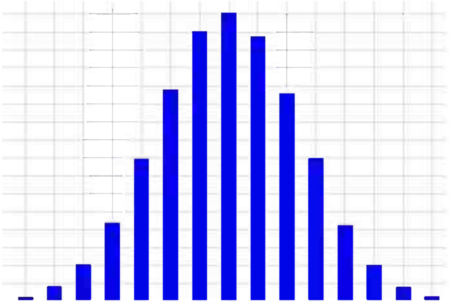
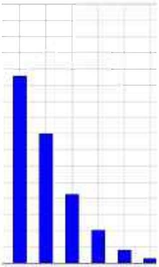
C'est un spectaculaire résultat de calcul différentiel, qui possède un précision contrôlée et remarquable. La méthode de démonstration est dans tous les bons cours de calcul différentiel.

Terminons par une anecdote amusante. Elle est due au célèbre physicien George Gamow (c'est lui qui a créé le terme "big bang") et se passe chez son boulanger.





Terminons par une anecdote amusante. Elle est due au célèbre physicien George Gamow (c'est lui qui a créé le terme "big bang") et se passe chez son boulanger.

-  
- La première image est la distribution du poids des pains que Gamow recevait. La deuxième est la distribution après que le boulanger ait simplement donné comme instruction expresse que M. Gamow ne devait jamais recevoir de pains trop légers.