Le cerveau: un objet géométrique ?

Bruno Colbois

25 avril 2003

Dans cette leçon, je vais présenter mon domaine de recherche, la géométrie riemannienne, et, pour faire simple, me limiter au cadre restreint de la géométrie des surfaces. Comme ces concepts sont forcément abstraits, il sera plus simple de les expliquer à l'aide d'un exemple concret: l'utilisation de la géométrie pour l'étude du cerveau.

Mon exposé s'inspire de travaux de recherche fondamentale menés par des équipes pluridisciplinaires d'instituts londoniens réunissant des spécialistes de médecine, de génie médical et, chose surprenante, des mathématiciens, notamment Philippe Batchelor qui a fait sa thèse sous ma direction. L'objectif de cette leçon est donc aussi de montrer que des concepts de mathématiques pures peuvent avoir des applications tout à fait inattendues.

Je saisirai également l'opportunité de cette leçon pour dire quelques mots de la recherche faite dans le groupe de géométrie. Avant d'entrer dans le vif du sujet, il convient de préciser les trois points suivants:

Ce que je vais décrire se situe au niveau de la recherche fondamentale et n'est qu'un aspect très particulier d'une étude globale.

J'insisterai dans cet exposé uniquement sur l'aspect géométrique des choses en passant pour l'essentiel sous silence les problèmes liés à la modélisation.

J'ai tenu pour acquis que les hypothèses de nature médicales ou biologiques étaient fondées. Cependant, si ça n'était pas le cas, cela n'enlèverait rien à l'intérêt mathématiques des choses.

Une bonne partie de cet exposé est inspiré de la lecture de [1] “Measures of Folding Applied to the development of the Human Fetal Brain”, de P. Batchelor, A.D. Castellano Smith, D. Hill, D. Hawkes, T. Cox, A. Dean. ainsi que de discussions avec Ph. Batchelor.

La question médicale

L'hypothèse de départ est que le cerveau d'une personne malade (par exemple schizophène ou épileptique) aura une forme différente du cerveau d'une personne bien portante. Mais en même temps, deux personnes différentes en bonne santé auront elles aussi des cerveaux de formes différentes. On cherche alors à effectuer un certains nombre de mesures dont les résultats permettraient de distinguer entre les différences naturelles qui apparaissent entre cerveaux sains, et des différences pathologiques.

Pourquoi utiliser la géométrie ?

Justement, on peut dire qu'un des champs d'application de la géométrie est de donner des outils adhéquats pour décrire la forme des objets. Par exemple, si on demande la différence entre un ballon de football et un ballon de rugby, chacun peut répondre que le premier est plus rond que le second. De la à donner une mesure de cette différence, il y a un pas que la géométrie riemannienne peut permettre de franchir.

La seconde hypothèse, motivant l'utilisation de la géométrie différentielle, est que le cortex (la partie superficielle du cerveau) a une forme très compliqué et joue un rôle très important. Il est très mince (2-3 millimètres) relativement à son aire (de l'ordre de 2000-2500 cm^2). On va l'assimiler à une surface et utiliser les outils de la géométrie différentielle pour l'étudier.

Notons au passage une question que l'on peut formuler en termes géométriques et que l'on trouve dans l'article [2] de Lewis D Griffin, “The intrinsic geometry of the cerebral cortex”, Journal of theoretical Biology 166:261-273 (1994).

Geometric properties of surfaces fall into two categories: **intrinsic** properties (which are invariant under folding of the surface, e.g. distances measured on the surface) and **extrinsic** properties (pure folding). The **extrinsic** geometry of the cortex determines the anatomical appearance of the cortex and the shape of the white matter. The **intrinsic** curvature of the cortex affects the relative position of functional areas and the spread of activity within the surface itself.

Theoretical considerations and simulations suggest that the intrinsic geometry may have a signifigant effect on ...

It is suggested that intrinsic descriptions of the cortex may prove more natural than extrinsic ones.

La géométrie

Dans cet exposé, on va définir différents invariants riemanniens pour les surfaces (en suivant [1]) en insistant particulièrement sur la différence entre invariants intrinsèques et extrinsèques, ce qui est un thème tout à fait classique d'un cours de géométrie de deuxième cycle, puis on expliquera quelles propriétés de la forme du cerveau (ou d'une surface) elles permettent de décrire.

On considère une surface compacte S de l'espace. On peut lui associer deux invariants d'ordre 0, c'est à dire ne faisant pas intervenir la structure différentielle de la surface (ou encore ne nécessitant pas l'utilisation du calcul différentiel pour être définis).

Le plus simple est l'aire de la surface, qui sera notée $A(S)$.

Puis vient le diamètre $d(S)$: C'est la distance correspondant aux points les plus éloignés de la surface. Mais... quel sens donner au terme "les plus éloignés" ? La distance dans l'espace, ou la distance que l'on parcours en restant sur la surface ? Pour la première, on parle de distance extrinsèque et pour la deuxième de distance intrinsèque. Le diamètre $d(S)$ que l'on considère est le diamètre intrinsèque. Il est invariant par toute déformation qui préserve la distance sur la surface, ce qui ne serait pas le cas du diamètre extrinsèque. On s'en convaint facilement en pensant à une feuille de papier.

On définit ensuite un invariant d'ordre 2, la courbure. Une définition précise peut être trouvée dans n'importe quel livre de géométrie riemannienne (par exemple [3], M. P. Do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, 1976), mais on présente ici une explication intuitive.

On commence par un cercle de rayon $r > 0$ qui, par définition, aura courbure $1/r$ (plus il est petit, plus il est courbé).

On défini la courbure d'une courbe c en un point P comme la courbure du cercle qui approxime le mieux la courbe au voisinage de P.

On se place en un point P de la surface S. On regarde toutes les courbes obtenues en intersectant S avec un plan passant par P et normal à S, et on note la courbure de chacune de ces courbes en P (en attribuant de plus un signe à cette courbure dépendant de la position par rapport à la normale à S).

Soient k_1 le maximum et k_2 le minimum de ces nombres (ce sont les courbures principales).

On appelle

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

la courbure moyenne de S en P et

$$K = k_1 k_2$$

la courbure de Gauss de S en P.

On peut se faire une idée intuitive de la courbure de Gauss en considérant la plan tangent en un point p de la surface: si au voisinage de p, toute la surface reste du même côté du plan, on a $K(p) \geq 0$, sinon on a $K(p) \leq 0$.

Exemple d'un cylindre: un cylindre de rayon r aura sa courbure de Gauss égale à 0 en tout point, alors que sa courbure moyenne sera égale à $\frac{1}{2r}$.

Bien que ces deux concepts de courbure soient définis de manière extrinsèque, on a le fait surprenant suivant (théorème Egregium, Gauss)

La courbure de Gauss est un invariant intrinsèque.

Exemple d'une feuille de papier: lorsque l'on bouge une feuille de papier dans l'espace, on "voit bien" que sa courbure change: cela s'exprime par le fait que sa courbure moyenne se modifie lors de la déformation. En revanche, on voit également que les distance sur la surface ne changent pas, en bref que l'on ne modifit pas la géométrie intrinsèque: cela s'exprime par le fait que la courbure de Gauss reste identiquement nulle.

Un exemple de concept extrinsèque est la convexité: une surface S compacte de l'espace détermine un intérieur et un extérieur. On dira que la surface S est convexe si le segment reliant deux points de S reste dans la partie intérieure.

On peut en avoir néanmoins une caractérisation intrinsèque:

Une surface (compacte) est convexe si et seulement si sa courbure de Gauss est strictement positive.

Comment utiliser la géométrie ?
A la suite de [1], on présente de nouveaux invariants intrinsèques et extrinsèques associés à une surface S de l'espace. Notons que l'on va exiger de ces invariants d'être **invariants par homothétie**: ils ont pour objectif de donner une idée de la *forme* et pas de la *taille* du cerveau.

Soit S une surface compacte dans l'espace et A le domaine borné qu'elle détermine. On lui associe d'abord 2 invariants d'ordre 0:

1. **Le rapport isopérimétrique**

$$IPR = \frac{Aire(S)}{VolA^{2/3}}$$

qui prend son minimum pour la sphère.

Rappelons que le domaine d'aire donnée déterminant le volume maximal est la sphère. L'invariant IPR mesure dans un certain sens le défaut de S à être une sphère.

2. **Le rapport de convexité**

$$CR = \frac{Aire(Cv(S))}{Aire(S)}$$

où $Cv(S)$ désigne l'enveloppe convexe de S.

L'invariant CR prend son minimum sur les convexe. On mesure donc dans un certain sens le défaut de S à être convexe.

Puis, on associe à S un invariants intrinsèque d'ordre 2, en intégrant la courbure de Gauss K de S.

3. **La L^2-norme de la courbure de Gauss** normalisée

$$GLN(S) = \sqrt{Aire(S)\int_S K^2 dVol}.$$

Notons d'abord que si on avait choisi d'intégrer la courbure de Gauss, on trouverait toujours le même nombre 2π: c'est le théorème de Gauss-Bonnet.

On a également la relation

$$\int_S K dVol \leq \sqrt{Aire(S)\int_S K^2 dVol}$$

avec égalité si et seulement si K est constante.

D'une certaine manière, GLN mesure donc le défaut à avoir courbure constante.

Enfin, on termine par un invariant extrinsèque d'ordre 2 défini en intégrant la courbure moyenne

4. L'invariant

$$MLN(S) = \sqrt{\int_S H^2 dVol}$$

mesure la déformation de la surface dans l'espace et prend son minimum sur la sphère.

Sur la pertinence de ces mesures:

Avant d'expliquer comment ces invariants riemanniens ont été concrètement évalués dans [1], on doit d'abord mentionner différentes difficultés qui ne seront pas traitées dans cet exposé, et dont certaines mériteraient certainement une autre leçon.

- Comment associer concrètement une surface au cortex d'un cerveau ? Comme celui-ci est épais quelque millimètres, mais qu'il a une forme très compliquée, il faut faire un choix, et ce choix peut influer les résultats;
- En général, on reçoit la surface associée au cerveau sous une forme discrétisée. La question se pose alors du calcul d'invariants différentiels dans un cadre discret: on peut associer une surface lisse à un ensemble discret, mais alors il faut d'abord un algorithme pour le faire, et ensuite voir de quelle manière les mesures dépendent de cet algorithme. On peut aussi chercher à faire les choses directement.

Les questions auxquelles ces mesures sont sensées répondre sont les suivantes:

Peut-on mesurer une différence entre des cerveaux normaux et des cerveaux malades?

Peut-on observer une évolution de la forme en fonction du temps ?

On peut dire qu ces différentes mesures ont été testées sur beaucoup trop peu de cerveaux pour que l'on puisse affirmer qu'elles sont pertinentes. Ce

qui semble ressortir de quelques observations:

1. Il semble qu'il y ait une évolution dans le temps de la forme du cerveau.

2. Qu'une différence puisse apparaitre entre les cerveaux normaux et les autres.

3. Que les aspects intrinsèques et extrinsèques se distinguent peu.

L'observation a été effectuée sur 10 cerveaux normaux de foetus de 19 à 40 semaines, et comme point de comparaison, 2 cerveaux anormaux d'enfants morts l'un à la naissance, l'autre à l'âge de 4 ans. Clairement, cela n'est pas très pertinent d'un point de vue statistiques.

Cas des cerveaux normaux:

	19 s.	23 s.	26 s.	27 s.	40 s.
IPR	8.1	8.27	10.9	8.35	22.4
CR	1.31	1.28	1.61	1.38	3.0
GLN	34.4	76.1	185	218.5	1646.1
MNL	2.7	3.45	5.14	6.81	13.3

Cas des cerveaux anormaux:

	40 s.	4 ans
IPR	6.99	6.30
CR	1.16	1.03
GLN	703	217
MLN	6.60	4.17

La recherche dans le groupe de géométrie.

La thématique développée dans cet exposé permet de préciser quelques aspects de la recherche effectuée dans le groupe de géométrie.

Etude des invariants riemanniens: tout au long de la conférence, on a beaucoup parlé *d'invariants intrinsèques* ou *riemanniens* associés à une surface S. L'un des thèmes de recherche du groupe est l'étude de l'un de ces invariants associé à une surface, ou plus généralement à une variété riemannienne compacte, la plus petite valeur propre non nulle du laplacien (agissant sur les fonctions ou sur les formes différentielles), notée $\lambda_1(S)$. L'idée est souvent de comprendre comment les différents invariants interagissent entre eux, par exemple comment $\lambda_1(S)$ dépend de la courbure, du diamètre ou de l'aire. Depuis 20 à 30 ans, on sait qu'il existe des relations très fortes entre la géométrie et la topologie d'une variété riemannienne. L'étude des valeurs propres du laplacien agissant sur les formes différentielles permet précisément de mettre en évidence de telles interactions. Cela apparaitpar exemple dans le travail de thèse de Pierre Jammes, dont la soutenance aura lieu prochainement.

La discrétisation : on dit qu'une surface (ou une variété riemannienne) est discrétisée lorsque l'on ne connait que quelques points de la surface, mais qui sont bien répartis. On cherche alors des relations entre les invariants riemanniens de la variétés et des invariants que l'on peut mesurer seulement grâce à la discrétisation. En clair, peut-on comprendre une variété en ne voyant que quelques uns de ses points. Dans le contexte ou l'on se trouve, on doit faire des hypothèses assez fortes sur la surface pour pouvoir obtenir des résultats rigoureux: par exemple, que la courbure soit bornée ou minorée. En particulier, on peut associer aussi un invariant $\lambda_{1,disc}$ à une discrétisation. Une étudiante en thèse, Tatiana Mantuano, travaille actuellement pour comparer les valeurs $\lambda_1(S)$ et $\lambda_{1,disc}$.

La géométrie métrique: dans une autre direction, on a vu que l'on pouvait faire de la géométrie sur des objets “moins lisses” que des surfaces, mais que cela posait des problèmes. Un des thèmes étudié dans le groupe de géométrie (et beaucoup en Suisse) est la géométrie métrique: faire des choses semblables à ce que l'on fait en géométrie différentielle, mais sans utiliser la structure différentielle. Dans notre groupe, on s'intéresse actuellement à la géométrie de Hilbert, qui dans un certain sens est une généralisation de la géométrie hyperbolique, ceci notamment en collaboration avec Patrick Verovic, de Chambéry.